рассматривать как функцию аргумента t_0. Имея это в виду, интегрированием по частям находим

$$u = \Delta v e^{-\frac{t-t_0}{\bar{\tau}}} \Big|_{t_0=-\infty}^{t_0=t} - k \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t_0}{\bar{\tau}}} d\xi.$$

Множитель Δv, как видно из формулы (42.33), обращается в нуль на верхнем пределе $t_0 = t$. На нижнем же пределе $t_0 = -\infty$ обращается в нуль экспоненциальный множитель. Таким образом, в правой части последнего выражения остается только второе слагаемое. Подставляя в него $d\xi = -eE(t_0)\,dt_0/m$ и выполняя интегрирование, получим

$$u = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{t} E(t_0)\, e^{-\frac{t-t_0}{\bar{\tau}}} dt_0.$$

Плотность тока

$$j = neu = \frac{ne^2}{m} \int_{-\infty}^{t} E(t_0)\, e^{-\frac{t-t_0}{\bar{\tau}}} dt_0.$$

Для исключения входящего сюда интеграла дифференцируем последнее выражение по t и находим

$$\frac{dj}{dt} = \frac{ne^2}{m} E(t) - \frac{ne^2}{m\bar{\tau}} \int_{-\infty}^{t} E(t_0)\, e^{-\frac{t-t_0}{\bar{\tau}}} dt_0.$$

Следовательно,

$$j + \bar{\tau}\frac{dj}{dt} = \frac{ne^2\bar{\tau}}{m} E$$

в согласии с ранее полученными результатами.

§ 43. Сторонние силы. Концентрационный элемент

1. Допустим, что единственными источниками электрического поля $\boldsymbol{E}$ в проводниках, по которым текут токи, являются электрические заряды, возбуждающие поля по закону Кулона. При прохождении тока непрерывно происходит убыль зарядов, точнее, нейтрализация положительного и отрицательного электричеств. Для того чтобы напряженность поля $\boldsymbol{E}$, а с ней и плотность электрического тока $\boldsymbol{j}$ оставались неизменными, необходимы какие-то дополнительные силы или процессы, непрерывно пополняющие электрические заряды.

Плотность электрического тока, как видно из формулы (42.7), определяется полной силой $\boldsymbol{F}$, действующей на электрон или другой носитель зарядов. Силу $\boldsymbol{F}$ можно разложить на две части: силу электрическую и силу неэлектрическую, включающую в себя все прочие силы. Эти прочие силы принято называть *сторонними*. В соответствии с этим полагаем $\boldsymbol{F}/e = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{стор}}$, где $\boldsymbol{E}^{\text{стор}}$ — *напряженность поля сторонних сил*, т. е. сторонняя сила, отнесенная к единице заряда. С учетом сторонних сил закон Ома записывается в виде

$$\boldsymbol{j} = \lambda(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{стор}}). \tag{43.1}$$

2. Приведем пример сторонней силы, не имеющий, правда, практического значения. Если металлический диск равномерно вращается с угловой скоростью ω (рис. 111), то в системе отсчета, связанной с диском, на электрон действует центробежная сила $m\omega^2\boldsymbol{r}$, где m — масса электрона. Разделив ее на заряд электрона e, найдем напряженность стороннего поля:

$$\boldsymbol{E}^{\text{стор}} = \frac{m\omega^2}{e}\boldsymbol{r} = \operatorname{grad}\frac{m\omega^2 r^2}{2e} = \frac{4\pi^2 m N^2}{e}\boldsymbol{r}, \qquad (43.2)$$

где N — число оборотов диска в секунду. (Силой Кориолиса можно пренебречь.) Если к оси и периферии диска подвести скользящие контакты, то через гальванометр потечет электрический ток. Чтобы составить представление о порядке величины $E^{\text{стор}}$, подставим в формулу (43.2) $r = 10$ см, $N = 100$ об/с. Получим ничтожную величину $E^{\text{стор}} \approx 2\cdot10^{-9}$ В/см.

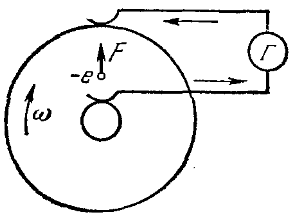

Рис. 111.

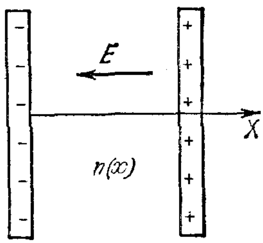

Рис. 112.

3. Второй простой пример, в котором сторонние силы носят несколько формальный характер, дает *концентрационный элемент*. Этот элемент представляет собой два электрода, погруженные в раствор электролита, концентрация которого меняется от точки к точке. Никаких химических реакций между электродами и электролитом не происходит. Электрический ток возникает и поддерживается в результате диффузионного выравнивания концентраций.

Для простоты будем предполагать электроды плоскими (рис. 112). Ось X направим перпендикулярно к поверхностям электродов от отрицательного электрода к положительному. Пусть концентрация электролита зависит только от x. Ради конкретности в качестве электролита возьмем водный раствор соляной кислоты HCl. Молекулы HCl диссоциируют на положительные ионы водорода H^+ и отрицательные ионы хлора Cl^-. Заряд отрицательного иона обозначим через e_-, положительного — через e_+. По абсолютной величине они одинаковы и равны элементарному заряду $|e| = 4{,}80\cdot10^{-10}$ СГСЭ-ед. Концентрации отрицательных и положительных ионов $n^-(x)$ и $n^+(x)$ в наших расчетах следует считать одинаковыми, так как электролит во всех случаях является либо электрически нейтральным, либо квазинейтральным (см. § 42). Поэтому можно обозначить эти концентрации одной и той же буквой $n(x)$.

Из-за наличия градиента концентрации $n(x)$ начнется диффузия обоих ионов в сторону уменьшения концентрации. Скорость диффузии водородных ионов много больше скорости диффузии ионов хлора. Благодаря этому возникнет *разделение зарядов* и появится *электрическое поле*, стремящееся затормозить диффузию ионов водорода и ускорить диффузию ионов хлора. Напряженность электрического поля будет возрастать до тех пор, пока скорости ионов обоих знаков не сделаются одинаковыми. Вместе с диффузией возникнет диффузионный электрический ток. Плотность диффузионного тока равна

$$-D^- \frac{dn^-}{dx} e_- - D^+ \frac{dn^+}{dx} e_+ = (D^- - D^+) \frac{dn}{dx} e,$$

где D^- и D^+ — коэффициенты диффузии ионов водорода и ионов хлора. Этот ток надо прибавить к току $(B^- + B^+)e^2nE$, вызванному электрическим полем (см. формулу (42.19). Плотность полного тока будет

$$j = (D^- - D^+) e \frac{dn}{dx} + (B^- + B^+) ne^2E.$$

Вводя в эту формулу электропроводность $\lambda = (B^- + B^+) ne^2$, получим

$$j = \lambda \left(E + \frac{1}{e} \frac{D^- - D^+}{B^- + B^+} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right).$$

Воспользовавшись соотношением Эйнштейна $D = kTB$ (см. т. II, § 91), придадим этой формуле вид

$$j = \lambda \left(E + \frac{kT}{e} \frac{B^- - B^+}{B^- + B^+} \frac{d}{dx} (\ln n) \right), \tag{43.3}$$

где k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура. Сравнение формулы (43.3) с (43.1) приводит к соотношению

$$E^{\text{стор}} = \frac{kT}{e} \frac{B^- - B^+}{B^- + B^+} \frac{d}{dx} (\ln n), \tag{43.4}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{E}^{\text{стор}} = \frac{kT}{e} \frac{B^- - B^+}{B^- + B^+} \operatorname{grad} \ln n. \tag{43.5}$$

Полученная формула показывает, что от диффузии можно отвлечься и формально рассматривать электролит как однородный, если к напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ добавить напряженность поля сторонних сил. Формула (42.4) справедлива и в случае электродов произвольной формы, так как электролит всегда можно мысленно разделить иа достаточно малые части, в пределах каждой из которых вектор grad ln n может считаться одним и тем же, и применить выражение (43.4).

Концентрационный элемент как источник электрического тока также не применяется на практике. Однако происходящие в нем процессы аналогичны процессам в *гальванических элементах*, где электрические токи поддерживаются за счет *химических реакций* между электродами и электролитами. Для гальванических элементов и прочих источников тока можно также пользоваться формулой (43.1). При этом можно отвлечься от детального рассмотрения физических процессов, возбуждающих и поддерживающих электрический ток в цепи, учитывая эти процессы формально с помощью поля сторонних сил $\mathbf{E}^{\text{стор}}$. Сторонние силы в гальванических элементах действуют на границах между электролитами и электродами. Они действуют также на границе соприкосновения двух разнородных металлов и обусловливают *контактную разность потенциалов* между ними.

4. Как показывают формулы (43.2) и (43.5), в обоих случаях, к которым они относятся, вектор $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ выражается через *градиент* какого-то скаляра. Иными словами, в тех областях пространства, в которых действуют сторонние силы, поле этих сил ведет себя как *потенциальное силовое поле.* Это утверждение носит общий характер, если только сторонние силы, как это бывает в большинстве встречающихся случаев, не зависят (или практически не зависят) от силы тока, текущего через источник. Действительно, сила тока зависит от электропроводности и геометрических размеров проводника, который соединяет полюсы источника. Разомкнем цепь, т. е. удалим этот проводник. Тогда, по нашему предположению, поле сторонних сил не изменится. Однако с размыканием цепи прекратятся и все токи, а потому на основании формулы (43.1) должно быть $\lambda(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стор}})=0$. Внутри источника $\lambda \neq 0$, и после сокращения на λ получаем $\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стор}}=0$. Поскольку электрическое поле $\mathbf{E}$ потенциально, отсюда следует, что внутри источника $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ ведет себя также как потенциальное поле. Вне источника $\lambda=0$, и соотношение $\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стор}}=0$ несправедливо. Поэтому во всем пространстве стороннее поле не потенциально. И только благодаря этому оно способно возбуждать и поддерживать постоянные электрические токи (см. следующий параграф).

ЗАДАЧА

Сторонние силы в концентрационном элементе можно рассматривать как силы осмотического давления, действующие в электролите при наличии градиента концентрации. Получить с этой точки зрения формулу (43.4).

Решение. Ввиду квазинейтральности электролита осмотические давления отрицательных и положительных ионов одинаковы. Каждое из них определяется формулой $\mathscr{P}=nkT$. На ионы каждого знака, находящиеся в единице объема, действует сила осмотического давления $-\partial\mathscr{P}/\partial x=-kT\,\dfrac{\partial n}{\partial x}$, а на один ион — сила $F^{\text{стор}} = -\frac{kT}{n}\frac{\partial n}{\partial x}$. Направление силы $F^{\text{стор}}$ не зависит от знака заряда иона. Под действием силы $F^{\text{стор}}$ ионы приобретут скорости $u_- = B^- F^{\text{стор}}$, $u_+ = B^+ F^{\text{стор}}$, и возникнет диффузионный электрический ток с плотностью

$$j_{\text{диф}} = n\,(e_- u_- + e_+ u_+) = ne\,(B^+ - B^-)\,F^{\text{стор}},$$

или ввиду соотношения (40.17)

$$j_{\text{диф}} = -\lambda \frac{B^- - B^+}{(B^- + B^+)\,e} F^{\text{стор}}.$$

Представив это выражение в виде $j_{\text{диф}} = \lambda E^{\text{стор}}$ и воспользовавшись выражением для $F^{\text{стор}}$, найдем напряженность стороннего поля $E^{\text{стор}}$, совпадающую с (43.4).

§ 44. Законы Ома и Джоуля — Ленца в интегральной форме

1. Рассмотрим важнейший случай, когда электрические токи текут вдоль *тонких проводов* (проволок). Направление тока будет совпадать с направлением оси провода. Это автоматически обеспечивается соответствующим распределением электрических зарядов на поверхностях проводников или в местах, где действуют сторонние силы. Площадь поперечного сечения провода S в различных местах его может быть неодинаковой. Для тонких проводов плотность тока j может считаться одной и той же во всех точках поперечного сечения провода. Через поперечное сечение провода в единицу времени проходит количество электричества

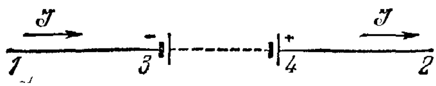

Рис. 113.

$$\mathcal{J} = jS, \tag{44.1}$$

называемое *силою тока* или просто *током*. Если ток постоянен, то из-за сохранения заряда величина $\mathcal{J}$ будет одна и та же вдоль всего провода. Для общности будем предполагать, что в проводе действуют сторонние силы, например, имеется гальванический элемент. Воспользуемся законом Ома в форме (43.1). Из него получаем

$$E + E^{\text{стор}} = \frac{j}{\lambda} = \frac{\mathcal{J}}{\lambda S}.$$

Умножим это соотношение на элемент длины провода dl и проинтегрируем по участку провода от какой-либо точки *1* до другой точки *2* (рис. 113). Поскольку ток один и тот же во всем проводе, величину $\mathcal{J}$ можно вынести из-под знака интеграла. Сделав это, найдем

$$\int_{12} E\,dl + \int E^{\text{стор}}\,dl = \mathcal{J}\int \frac{dl}{\lambda S}.$$

Так как электрическое поле стационарных токов потенциально,