один ион — сила $F^{\text{стор}} = -\frac{kT}{n}\frac{\partial n}{\partial x}$. Направление силы $F^{\text{стор}}$ не зависит от знака заряда иона. Под действием силы $F^{\text{стор}}$ ионы приобретут скорости $u_- = B^- F^{\text{стор}}$, $u_+ = B^+ F^{\text{стор}}$, и возникнет диффузионный электрический ток с плотностью

$$j_{\text{диф}} = n(e_- u_- + e_+ u_+) = ne(B^+ - B^-) F^{\text{стор}},$$

или ввиду соотношения (40.17)

$$j_{\text{диф}} = -\lambda \frac{B^- - B^+}{(B^- + B^+)e} F^{\text{стор}}.$$

Представив это выражение в виде $j_{\text{диф}} = \lambda E^{\text{стор}}$ и воспользовавшись выражением для $F^{\text{стор}}$, найдем напряженность стороннего поля $E^{\text{стор}}$, совпадающую с (43.4).

§ 44. Законы Ома и Джоуля — Ленца в интегральной форме

1. Рассмотрим важнейший случай, когда электрические токи текут вдоль *тонких проводов* (проволок). Направление тока будет совпадать с направлением оси провода. Это автоматически обеспечивается соответствующим распределением электрических зарядов на поверхностях проводников или в местах, где действуют сторонние силы. Площадь поперечного сечения провода S в различных местах его может быть неодинаковой. Для тонких проводов плотность тока j может считаться одной и той же во всех точках поперечного сечения провода. Через поперечное сечение провода в единицу времени проходит количество электричества

Рис. 113.

$$\mathscr{J} = jS, \tag{44.1}$$

называемое *силою тока* или просто *током*. Если ток постоянен, то из-за сохранения заряда величина $\mathscr{J}$ будет одна и та же вдоль всего провода. Для общности будем предполагать, что в проводе действуют сторонние силы, например, имеется гальванический элемент. Воспользуемся законом Ома в форме (43.1). Из него получаем

$$E + E^{\text{стор}} = \frac{j}{\lambda} = \frac{\mathscr{J}}{\lambda S}.$$

Умножим это соотношение на элемент длины провода dl и проинтегрируем по участку провода от какой-либо точки *1* до другой точки *2* (рис. 113). Поскольку ток один и тот же во всем проводе, величину $\mathscr{J}$ можно вынести из-под знака интеграла. Сделав это, найдем

$$\int_{12} E\,dl + \int E^{\text{стор}}\,dl = \mathscr{J} \int \frac{dl}{\lambda S}.$$

Так как электрическое поле стационарных токов потенциально, то первый интеграл выражается через разность потенциалов $\varphi_1-\varphi_2$. Второй интеграл достаточно распространить на ту часть пути, где $E^{\text{стор}} \neq 0$, т. е. на ту часть, которая проходит внутри гальванического элемента. Этот интеграл не зависит от положения начальной и конечной точек *1* и *2*. Требуется только, чтобы эти точки находились вне гальванического элемента. Ввиду потенциального характера поля $E^{\text{стор}}$ в области, где действуют сторонние силы, интеграл не зависит также от того, как проходит путь интегрирования через гальванический элемент. Значит, этот интеграл есть величина, характеризующая свойства самого элемента. Она называется *электродвижущей силой элемента*:

$$\mathscr{E} = \int\limits_{12} E^{\text{стор}}\, dl = \int\limits_{34} E^{\text{стор}}\, dl. \tag{44.2}$$

Электродвижущая сила положительна, если путь *12* пересекает гальванический элемент в направлении от катода к аноду, и отрицательна в противоположном случае [1]). Третий интеграл

$$R = \int \frac{dl}{\lambda S} = \int \rho \frac{dl}{S} \tag{44.3}$$

есть величина, характеризующая провод, по которому течет электрический ток. Эта величина называется *электрическим сопротивлением* или просто *сопротивлением провода*. Если провод изготовлен из однородного материала и всюду имеет одинаковую толщину, то получается известная формула

$$R = \rho \frac{l}{S}. \tag{44.4}$$

Таким образом,

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E} = \mathscr{I} R. \tag{44.5}$$

При выводе формулы (44.5) предполагалось, что провод тонкий на протяжении всей своей длины, включая участок, где находится гальванический элемент. Последнее условие, как правило, почти никогда не соблюдается. Тем не менее, как будет показано в конце настоящего параграфа, формула (44.5) справедлива и в этом случае.

2. Формула (44.5) выражает *закон Ома в интегральной форме* в отличие от соотношения (43.1), представляющего тот же закон в *локальной форме*. Эту формулу называют также *законом Ома для участка цепи*. Понятно, что R есть сопротивление *всего участка*, включая сопротивление самого элемента. Если участок не содержит гальванического элемента (или, вообще, на нем не действуют сторонние силы), то формула (44.5) принимает вид

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathscr{I} R. \tag{44.6}$$

---

[1]) Термодинамическая теория электродвижущей силы гальванического элемента изложена в т. II, § 49.

Разность потенциалов $\varphi_1-\varphi_2$ называется в этом случае *электрическим напряжением* или просто *напряжением на концах рассматриваемого провода*. В общем случае электрическое напряжение определяется как интеграл $\int E\,dl$, взятый вдоль длины провода. Такое определение годится и в тех случаях, когда электрическое поле не потенциально.

Если начальная и конечная точки *1* и *2* совпадают, то $\varphi_1-\varphi_2=0$ и формула (44.5) переходит в *закон Ома для всей (замкнутой) цепи*:

$$\mathscr{E}=\mathscr{I}R. \tag{44.7}$$

Здесь R означает уже *полное сопротивление всей цепи*. Если $\varphi_а$ — потенциал анода, а $\varphi_к$ — катода, то $\varphi_а-\varphi_к=R_e\mathscr{I}$, где R_e — сопротивление всего внешнего участка цепи. Сравнивая это соотношение с (44.7), получим

$$\frac{\varphi_а-\varphi_к}{\mathscr{E}}=\frac{R_e}{R}=\frac{R_e}{R_e+R_i}, \tag{44.8}$$

где R_i — внутреннее сопротивление самого элемента. Отсюда следует, что всегда, когда по цепи течет ток, разность потенциалов между полюсами элемента $\varphi_а-\varphi_к$ меньше электродвижущей силы $\mathscr{E}$. Только в предельном случае, когда $R_e\to\infty$ (а следовательно, $\mathscr{I}\to 0$), получается $\mathscr{E}=\varphi_а-\varphi_к$. Значит, *электродвижущую силу* $\mathscr{E}$ *можно определить как разность потенциалов между полюсами разомкнутого источника тока.*

3. Практической единицей тока, употребляемой в электротехнике, является *ампер* (А). Это есть сила такого тока, когда через поперечное сечение провода ежесекундно проходит один кулон электричества. Практическая единица напряжения, или разности потенциалов, есть *вольт* (В). Он определяется как такая разность потенциалов, при прохождении которой над зарядом в один кулон совершается работа в один джоуль. Практическая единица сопротивления есть *ом* (Ом), т. е. сопротивление такого провода, по которому потечет ток в один ампер, если на его концах поддерживать разность потенциалов в один вольт. Соответственно единица удельного сопротивления ρ будет Ом·см, а электропроводности — $\text{Ом}^{-1}\cdot\text{см}^{-1}$. Мы видим, что в практической системе единиц ρ уже не имеет размерности времени, как это было в гауссовой системе (см. § 41, пункт 1). Очевидно,

$$1\ \text{Ом}=\frac{1\ \text{В}}{1\ \text{А}}=\frac{1/300}{3\cdot 10^9}=\frac{1}{9}\cdot 10^{-11}\ \text{СГСЭ-ед. сопротивления.}$$

4. Рассмотрим n проводов, соединенных параллельно (рис. 114). Будем предполагать, что в проводах действуют электродвижущие силы $\mathscr{E}_к$. Наша схема включает в себя как частный случай и параллельное соединение элементов. Если R_k — сопротивление k-го провода (вместе с внутренним сопротивлением элемента), то ток в нем определяется выражением

$$\mathscr{I}_k = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_k} + \frac{\mathscr{E}_k}{R_k}.$$

Сложив эти выражения, найдем полный ток, текущий в цепи:

$$\mathscr{I} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} + \frac{\mathscr{E}}{R}, \tag{44.9}$$

где введены обозначения

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_k}, \tag{44.10}$$

$$\mathscr{E} = R \sum \frac{\mathscr{E}_k}{R_k}. \tag{44.11}$$

Формула (44.10) определяет *сопротивление параллельно соединенных проводов*. Величина (44.11) играет роль электродвижущей силы. Для того чтобы она не зависела от сопротивлений внешних проводов, достаточно понимать под R_k только внутренние сопротивления элементов. Тогда формула (44.11) будет определять *электродвижущую силу батареи параллельно соединенных элементов*. Если все элементы одинаковы, то $\mathscr{E} = \mathscr{E}_k$, т. е. *электродвижущая сила батареи равна электродвижущей силе одного элемента.*

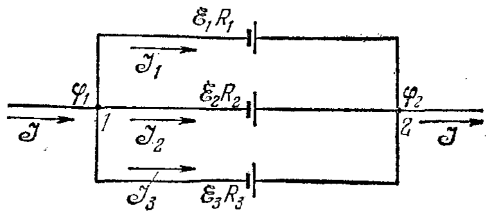

Рис. 114.

Теперь видно, что для справедливости закона Ома (44.5) участки, содержащие гальванические элементы, не обязательно должны быть тонкими. Достаточно заметить, что область, обтекаемую током, всегда можно мысленно разделить на достаточно тонкие трубки тока, которые можно рассматривать как параллельно соединенные тонкие провода. Электродвижущие силы $\mathscr{E}_k$ в этих проводах одинаковы ввиду потенциального характера поля E в области, где действуют сторонние силы (см. конец предыдущего параграфа). Применив к рассматриваемой системе проводов соотношения (44.9) — (44.11), мы снова придем к закону Ома (44.5). При этом, ввиду одинаковости всех $\mathscr{E}_k$, величина $\mathscr{E}_k$ будет означать просто электродвижущую силу источника тока.

5. *Закон Джоуля — Ленца в интегральной форме* получается из *дифференциальной формы* этого закона интегрированием по объему провода. Представив элемент объема в виде $dV = S\,dl$, получим

$$Q = \int \frac{j^2}{\lambda} S\,dl = \mathscr{I}^2 \int \frac{dl}{\lambda S} = \mathscr{I}^2 R. \tag{44.12}$$

Это и есть интегральная форма закона Джоуля — Ленца. Формула (44.12) определяет тепло, выделяющееся ежесекундно в рассматриваемом участке провода. Если взять всю замкнутую цепь, то $Q = \mathcal{I}\mathcal{E} = \mathcal{I}\oint E^{\text{стор}}\,dl$. Отсюда видно, что *тепло производится одними только сторонними силами*. Роль электрического поля сводится к тому, что оно перераспределяет это тепло по различным участкам цепи.

ЗАДАЧИ

1. N одинаковых элементов с электродвижущей силой $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением R_i разделены на m групп по n элементов в группе. Элементы в каждой группе соединены параллельно одноименными полюсами, а сами группы соединены между собой последовательно. При каком условии ток в цепи (при заданном внешнем сопротивлении R_e) будет максимальным?

Ответ. Ток максимален, если $R_e = mR_i/n$, т. е. когда внешнее сопротивление цепи равно внутреннему сопротивлению батареи. Для соблюдения этого условия необходимо, чтобы было $NR_i \geqslant R_e$. Сила максимального тока $\mathcal{I}_{\text{макс}} = m\mathcal{E}/(2R_e)$.

2. Вычислить электродвижущую силу концентрационного элемента.

Решение. Из формулы (43.5) получаем

$$\mathcal{E} = \frac{kT}{e}\,\frac{B^- - B^+}{B^- + B^+}\ln\frac{n_1}{n_2}, \tag{44.13}$$

где n_1 и n_2 — концентрации электролита у электродов элемента. По порядку величины

$$\mathcal{E} = \frac{kT}{e} = \frac{1{,}38\cdot 10^{-16}\cdot 300}{4{,}8\cdot 10^{-10}} = 8{,}6\cdot 10^{-5}\ \text{СГСЭ-ед.} = 0{,}025\ \text{В}.$$

Из-за малости $\mathcal{E}$ концентрационный элемент не может служить практическим источником тока.

§ 45. Правила Кирхгофа

Рассмотрим произвольную разветвленную сеть проводов, в отдельных участках которой включены гальванические элементы или другие источники тока. Электродвижущие силы этих источников постоянны и предполагаются известными. Токи во всех участках цепи и разности потенциалов на них можно рассчитать с помощью закона Ома (44.5) и закона сохранения электрического заряда. Однако более просто задача решается с помощью двух *правил Кирхгофа*. Одно из них выражает *закон сохранения электрического заряда* для линейных проводов, а другое является *следствием закона Ома*. Сформулируем эти правила.

Первое правило Кирхгофа. *В каждой точке разветвления проводов алгебраическая сумма сил токов равна нулю* (рис. 115). *Токи, идущие к точке разветвления, и токи, исходящие из нее, следует считать величинами разных знаков*. Например, применительно к рис. 115 первое правило Кирхгофа запишется так:

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3 = 0.$$