Это и есть интегральная форма закона Джоуля — Ленца. Формула (44.12) определяет тепло, выделяющееся ежесекундно в рассматриваемом участке провода. Если взять всю замкнутую цепь, то $Q = \mathscr{I}\mathscr{E} = \mathscr{I}\oint E^{\text{стор}}\,dl$. Отсюда видно, что *тепло производится одними только сторонними силами*. Роль электрического поля сводится к тому, что оно перераспределяет это тепло по различным участкам цепи.

## ЗАДАЧИ

1. $N$ одинаковых элементов с электродвижущей силой $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением $R_i$ разделены на $m$ групп по $n$ элементов в группе. Элементы в каждой группе соединены параллельно одноименными полюсами, а сами группы соединены между собой последовательно. При каком условии ток в цепи (при заданном внешнем сопротивлении $R_e$) будет максимальным?

Ответ. Ток максимален, если $R_e = mR_i/n$, т. е. когда внешнее сопротивление цепи равно внутреннему сопротивлению батареи. Для соблюдения этого условия необходимо, чтобы было $NR_i \geqslant R_e$. Сила максимального тока $\mathscr{I}_{\text{макс}} = m\mathscr{E}/(2R_e)$.

2. Вычислить электродвижущую силу концентрационного элемента.

Решение. Из формулы (43.5) получаем

$$\mathscr{E} = \frac{kT}{e}\frac{B^- - B^+}{B^- + B^+}\ln\frac{n_1}{n_2}, \tag{44.13}$$

где $n_1$ и $n_2$ — концентрации электролита у электродов элемента. По порядку величины

$$\mathscr{E} = \frac{kT}{e} = \frac{1{,}38\cdot 10^{-16}\cdot 300}{4{,}8\cdot 10^{-10}} = 8{,}6\cdot 10^{-5}\ \text{СГСЭ-ед.} = 0{,}025\ \text{В}.$$

Из-за малости $\mathscr{E}$ концентрационный элемент не может служить практическим источником тока.

## § 45. Правила Кирхгофа

Рассмотрим произвольную разветвленную сеть проводов, в отдельных участках которой включены гальванические элементы или другие источники тока. Электродвижущие силы этих источников постоянны и предполагаются известными. Токи во всех участках цепи и разности потенциалов на них можно рассчитать с помощью закона Ома (44.5) и закона сохранения электрического заряда. Однако более просто задача решается с помощью двух *правил Кирхгофа*. Одно из них выражает *закон сохранения электрического заряда* для линейных проводов, а другое является *следствием закона Ома*. Сформулируем эти правила.

Первое правило Кирхгофа. *В каждой точке разветвления проводов алгебраическая сумма сил токов равна нулю* (рис. 115). *Токи, идущие к точке разветвления, и токи, исходящие из нее, следует считать величинами разных знаков.* Например, применительно к рис. 115 первое правило Кирхгофа запишется так:

$$\mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2 - \mathscr{I}_3 = 0.$$

Если бы это правило не соблюдалось, то в точках разветвления проводов накапливались бы электрические заряды, меняющиеся во времени. Вместе с ними менялось бы во времени и электрическое поле, а потому токи не могли бы оставаться постоянными.

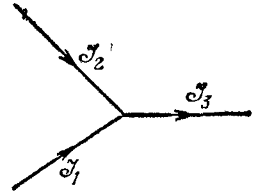


Рис. 115.

В т о р о е п р а в и л о К и р х г о ф а. *Выделим в сети произвольный замкнутый контур, состоящий из проводов. Сумма электродвижущих сил, действующих в таком контуре, равна сумме произведений сил токов в отдельных участках этого контура на их сопротивления.*

Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда контур состоит из трех участков (рис. 116). Применяя к ним закон Ома (44.5), можем написать

$$\varphi_2-\varphi_3+\mathscr{E}_1=\mathscr{I}_1R_1,$$
$$\varphi_3-\varphi_1+\mathscr{E}_2=\mathscr{I}_2R_2,$$
$$\varphi_1-\varphi_2+\mathscr{E}_3=\mathscr{I}_3R_3.$$

Складывая эти равенства, получим

$$\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3=\mathscr{I}_1R_1+\mathscr{I}_2R_2+\mathscr{I}_3R_3,$$

т. е. второе правило Кирхгофа.

Правила Кирхгофа в каждом конкретном случае позволяют написать *полную систему линейных уравнений*, из которой могут быть найдены все неизвестные токи. В нее совсем не входят неизвестные разности потенциалов. В исключении потенциалов из уравнений для токов и состоит упрощение, вносимое правилами Кирхгофа по сравнению с законом Ома. При применении правил Кирхгофа надо поступать следующим образом:

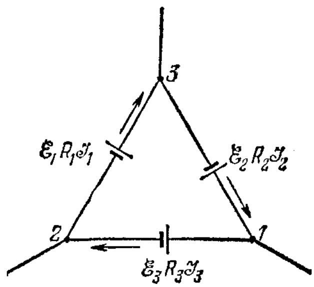


Рис. 116.

1) Направления токов во всех участках сети следует обозначить стрелками, *не задумываясь над тем, куда эти стрелки направить. Если вычисление покажет, что ток положителен, то его направление указано правильно. Если же ток отрицателен, то его истинное направление противоположно направлению стрелки.*

2) Выбрав произвольный замкнутый контур, все его участки следует обойти в *одном направлении. Если это направление совпадает с направлением стрелки, то слагаемое $R\mathscr{I}$ берется со знаком плюс. Если же эти направления противоположны, то оно берется со знаком минус. Если при обходе контура источник тока проходится*

*от отрицательного полюса к положительному, то его электродвижущую силу следует считать положительной; в противоположном случае ее надо считать отрицательной.*

3) *Все электродвижущие силы и все сопротивления проводов должны входить в систему уравнений.*

Рассмотрим два примера на правила Кирхгофа.

Пример 1. Мостик Уитстона (1802—1875). Схема мостика представлена на рис. 117. Расставим (произвольно) стрелки, указывающие направления токов. Имеется четыре точки разветвления: $A$, $B$, $C$, $D$. Применение к ним первого правила Кирхгофа приводит к четырем уравнениям:

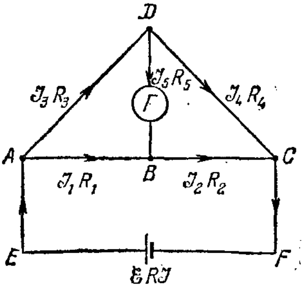


Рис. 117.

$$\mathscr{I} - \mathscr{I}_1 - \mathscr{I}_3 = 0, \quad \mathscr{I}_1 - \mathscr{I}_2 + \mathscr{I}_5 = 0,$$
$$\mathscr{I}_2 + \mathscr{I}_4 - \mathscr{I} = 0, \quad \mathscr{I}_3 - \mathscr{I}_4 - \mathscr{I}_5 = 0. \qquad (45.1)$$

Из этих уравнений независимы *только три* (при сложении всех уравнений получается тождество $0 = 0$). Для определения шести неизвестных $\mathscr{I}$, $\mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_2$, $\mathscr{I}_3$, $\mathscr{I}_4$, $\mathscr{I}_5$ требуется *еще три* уравнения. Их дает второе правило Кирхгофа. Применяя его, можно брать разные контуры. Но один из них *должен обязательно содержать источник тока* (с электродвижущей силой $\mathscr{E}$). Можно, например, взять контуры $ABD$, $BDC$ и $ABCFEA$. Для них второе правило Кирхгофа дает

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_1 R_1 - \mathscr{I}_5 R_5 - \mathscr{I}_3 R_3 &= 0, \\ \mathscr{I}_2 R_2 - \mathscr{I}_4 R_4 + \mathscr{I}_5 R_5 &= 0, \\ \mathscr{I} R + \mathscr{I}_1 R_1 + \mathscr{I}_2 R_2 &= \mathscr{E}. \end{aligned} \qquad (45.2)$$

Здесь $R$ — сопротивление участка $CFEA$, включая внутреннее сопротивление источника тока. Использование других контуров не дает новых независимых уравнений. Решая уравнения (45.1) совместно с уравнениями (45.2), можно вычислить все токи. Ограничимся выводом условия, при котором ток в мостике $\mathscr{I}_5$ обращается в нуль. Если $\mathscr{I}_5 = 0$, то из уравнений (45.1) следует $\mathscr{I}_1 = \mathscr{I}_2$, $\mathscr{I}_3 = \mathscr{I}_4$. После этого из первых двух уравнений (45.2) находим

$$\mathscr{I}_1 R_1 = \mathscr{I}_3 R_3, \qquad \mathscr{I}_1 R_2 = \mathscr{I}_3 R_4.$$

Отсюда почленным делением получаем известное условие

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4},$$

на котором основано применение мостика Уитстона для измерения сопротивлений проводов. Ветвь $AC$ (реохорд) изготовляется из длинной однородной проволоки с большим удельным сопротивлением, так что отношение $R_1/R_2$ можно заменить отношением длин $AB/BC$.

Пример 2. Сравнение электродвижущих сил элементов методом Поггендорфа (1796—1877). Схема опыта изображена на рис. 118. Предполагается, что $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$. Первое правило Кирхгофа дает

$$\mathscr{I}_1 - \mathscr{I}_2 - i_1 = 0,$$

а второе

$$\mathscr{I}_1(R_1 + r_2) + i_1 r_1 = \mathscr{E}_1,$$
$$i_1 r_1 - \mathscr{I}_2 R_2 = \mathscr{E}_2.$$

Под $R_2$ понимается сумма внутреннего сопротивления элемента 2 и сопротивления гальванометра. Найдем условие, при котором ток через гальванометр не пойдет. Если $\mathscr{I}_2 = 0$, то $\mathscr{I}_1 = i_1$ и, следовательно,

$$\mathscr{I}_1(R_1 + r_1 + r_2) = \mathscr{E}_1, \qquad \mathscr{I}_1 r_1 = \mathscr{E}_2.$$

Отсюда получаем искомое условие

$$\frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{r_1}{r_1 + r_2 + R_1}. \tag{45.3}$$

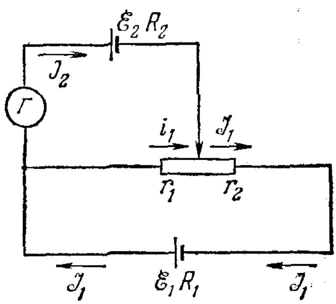

Рис. 118.

В это уравнение входит неизвестное сопротивление $R_1$. Для его исключения применяется следующий метод. Опыт повторяют, заменив элемент 2 элементом 3 с электродвижущей силой $\mathscr{E}_3 < \mathscr{E}_1$, оставляя все остальные параметры схемы неизменными. Ток через гальванометр не пойдет при новых значениях сопротивлений $r_1$ и $r_2$. Обозначая их через $r_1'$ и $r_2'$, можем написать $\mathscr{E}_3/\mathscr{E}_1 = r_1'/(r_1' + r_2' + R_1)$. Так как $r_1 + r_2 = r_1' + r_2'$, то отсюда и из условия (45.3) получаем $\mathscr{E}_3/\mathscr{E}_2 = r_1'/r_1$. Как и в предыдущей схеме, отношение $r_1'/r_1$ можно свести к отношению длин и после этого вычислить неизвестное отношение электродвижущих сил $\mathscr{E}_3/\mathscr{E}_2$.

## ЗАДАЧИ

**1.** Три гальванических элемента с электродвижущими силами $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ и $\mathscr{E}_3$ и внутренними сопротивлениями $r_1$, $r_2$, $r_3$ соединены по схеме, указанной на рис. 119. Сопротивления соединяющих проводов пренебрежимо малы. 1) Какое напряжение $V$ будет показывать вольтметр, включенный так, как указано на этом рисунке? 2) Чему будет равно показание вольтметра, если величины $\mathscr{E}_i$ и $r_i$ связаны соотношением $\mathscr{E}_1/r_1 = \mathscr{E}_2/r_2 = \mathscr{E}_3/r_3$?

Ответ: 1) $V = r_1 \dfrac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3}{r_1 + r_2 + r_3}$. 2) $V = 0$.

**2.** В разрыв проводящего подвижного диаметра $CD$ (рис. 120) включена неоновая лампочка, потенциалы зажигания и гашения которой равны соответственно $V_{заж} > V_{гаш}$. Круг $ACBD$, сопротивление которого мало по сравнению с сопротивлением неоновой лампочки (когда она горит), сделан из однородной проволоки постоянного поперечного сечения. Между точками $A$ и $B$ поддерживается постоянное напряжение $V$. 1) При каких положениях диаметра $CD$ лампочка вспыхивает и гаснет? 2) Чему равно минимальное значение напряжения $V$, при котором лампочка еще может вспыхнуть?

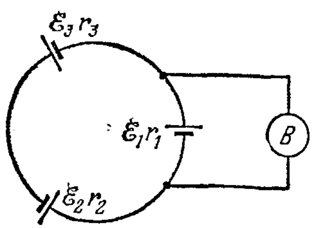


Рис. 119.

Ответ. 1) Вспыхивает при $\alpha = \frac{\pi}{2}(1 \mp \mp V_{заж}/V)$, гаснет при $\alpha = \frac{\pi}{2}(1 \mp V_{гаш}/V)$. 2) $V_{мин} = V_{заж}$.

**3.** Сопротивления $R_1$ и $R_2$ (рис. 121) подобраны так, что ток через гальванометр не идет. Считая известными электродвижущие силы $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, найти электродвижущую силу $\mathscr{E}$. Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь по сравнению с $R_1$ и $R_2$.

Ответ. $\mathscr{E} = \dfrac{R_2\mathscr{E}_1 + R_1\mathscr{E}_2}{R_1 + R_2}$.

**4.** Сопротивления $R_1$, $R_2$, $R_3$ (рис. 122) подобраны так, что ток через гальванометр не идет. Электродвижущие силы $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_3$ известны. Считая известными сопротивления $R_1$, $R_2$, $R_3$ и пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей, найти электродвижущую силу $\mathscr{E}_2$ и ток $\mathscr{I}_1$, текущий через батарею $\mathscr{E}_1$.

Ответ. $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3(1 + R_2/R_3)$; $\mathscr{I}_1 = \mathscr{E}_1/R_1 - (\mathscr{E}_3/R_1)(1 + R_2/R_3)$.

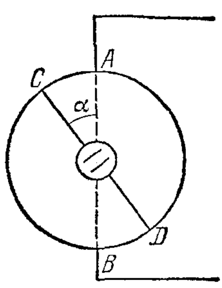


Рис. 120.

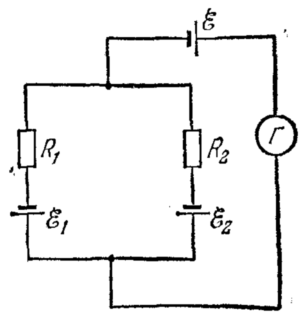


Рис. 121.

**5.** В боковые стороны и диагонали схемы мостика Уитстона включены источники тока с произвольными электродвижущими силами (рис. 123). Сопротивления этих сторон и диагоналей, включая внутренние сопротивления источников тока, равны соответственно $R_1$, $R_2$, ..., $R_6$. При каком условии замыкание и размыкание ключа в диагонали 6 не влияет на показание гальванометра, включенного в диагональ 5?

Решение. Допустим, что вначале ключ $K$ был замкнут. Тогда

$$\mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_3 + \mathscr{I}_5 = 0, \quad \mathscr{I}_2 + \mathscr{I}_4 + \mathscr{I}_5 = 0,$$
$$\mathscr{I}_1 R_1 + \mathscr{I}_2 R_2 - \mathscr{I}_5 R_5 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_5,$$
$$\mathscr{I}_3 R_3 + \mathscr{I}_4 R_4 - \mathscr{I}_5 R_5 = \mathscr{E}_3 + \mathscr{E}_4 - \mathscr{E}_5.$$

Если разомкнуть ключ $K$, то $\mathscr{I}_6$ обратится в нуль, что приведет к изменению остальных токов. Однако ток $\mathscr{I}_5$ по условию должен остаться неизменным. Обозначая новые значения токов штрихами, придем к прежней системе уравнений,

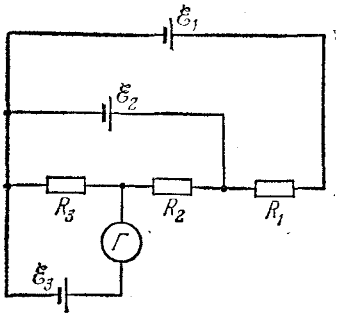


Рис. 122.

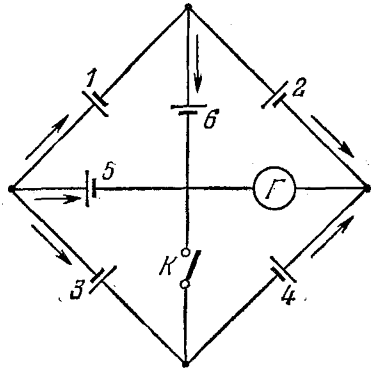


Рис. 123.

в которой все «штрихованные» токи заменены «нештрихованными», причем $\mathscr{I}'_5 = \mathscr{I}_5$. Сравнивая эти две системы уравнений, получаем

$$\begin{gathered}\mathscr{I}_1+\mathscr{I}_3=\mathscr{I}'_1+\mathscr{I}'_3,\\ \mathscr{I}_2+\mathscr{I}_4=\mathscr{I}'_2+\mathscr{I}'_4,\\ \mathscr{I}_1R_1+\mathscr{I}_2R_2=\mathscr{I}'_1R_1+\mathscr{I}'_2R_2,\\ \mathscr{I}_3R_3+\mathscr{I}_4R_4=\mathscr{I}'_3R_3+\mathscr{I}'_4R_4.\end{gathered}$$

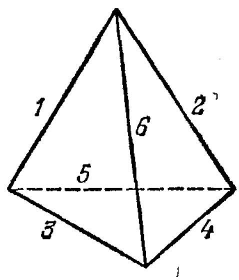


Рис. 124.

Переписав эту систему уравнений в виде

$$\begin{gathered}R_1(\mathscr{I}_1-\mathscr{I}'_1)=R_2(\mathscr{I}'_2-\mathscr{I}_2),\\ R_3(\mathscr{I}_3-\mathscr{I}'_3)=R_4(\mathscr{I}'_4-\mathscr{I}_4),\\ \mathscr{I}_1-\mathscr{I}'_1=\mathscr{I}'_3-\mathscr{I}_3,\\ \mathscr{I}_2-\mathscr{I}'_2=\mathscr{I}'_4-\mathscr{I}_4,\end{gathered}$$

почленным делением первых двух уравнений находим искомое условие:

$$R_1/R_3=R_2/R_4.$$

**6.** В предыдущей схеме (см. рис. 123) гальванометр из диагонали перенесен в боковую сторону *1*, а ключ $K$ — в противоположную боковую сторону *4*. При каком условии замыкание и размыкание ключа не будет влиять на показания гальванометра?

Ответ. $R_2/R_6 = R_5/R_3$.

Для получения ответа не требуется новых вычислений, если заметить, что обе схемы топологически эквивалентны, т. е. одна может быть получена из другой непрерывной деформацией. В этом проще всего убедиться, если перейти к пространственной схеме мостика Уитстона, в которой провода изображаются ребрами правильного тетраэдра (рис. 124).

## § 46. Стационарные токи в массивных проводниках

**1.** Пусть в проводящей однородной среде помещены два электрода $A$ и $B$ (рис. 125), электропроводность которых очень велика по сравнению с электропроводностью самой среды. В этих условиях