Если разомкнуть ключ K, то $\mathcal{I}_6$ обратится в нуль, что приведет к изменению остальных токов. Однако ток $\mathcal{I}_5$ по условию должен остаться неизменным. Обозначая новые значения токов штрихами, придем к прежней системе уравнений,

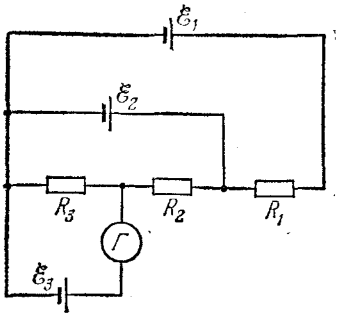

Рис. 122.

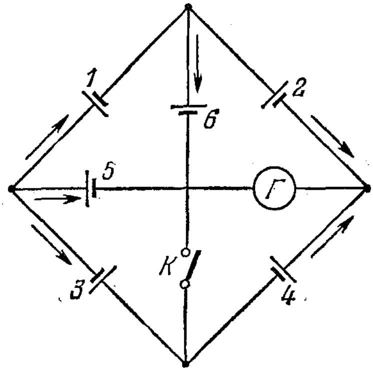

Рис. 123.

в которой все «штрихованные» токи заменены «нештрихованными», причем $\mathcal{I}'_5 = \mathcal{I}_5$. Сравнивая эти две системы уравнений, получаем

$$\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_3=\mathcal{I}'_1+\mathcal{I}'_3,$$
$$\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_4=\mathcal{I}'_2+\mathcal{I}'_4,$$
$$\mathcal{I}_1R_1+\mathcal{I}_2R_2=\mathcal{I}'_1R_1+\mathcal{I}'_2R_2,$$
$$\mathcal{I}_3R_3+\mathcal{I}_4R_4=\mathcal{I}'_3R_3+\mathcal{I}'_4R_4.$$

Переписав эту систему уравнений в виде

$$R_1(\mathcal{I}_1-\mathcal{I}'_1)=R_2(\mathcal{I}'_2-\mathcal{I}_2),$$
$$R_3(\mathcal{I}_3-\mathcal{I}'_3)=R_4(\mathcal{I}'_4-\mathcal{I}_4),$$
$$\mathcal{I}_1-\mathcal{I}'_1=\mathcal{I}'_3-\mathcal{I}_3,$$
$$\mathcal{I}_2-\mathcal{I}'_2=\mathcal{I}'_4-\mathcal{I}_4,$$

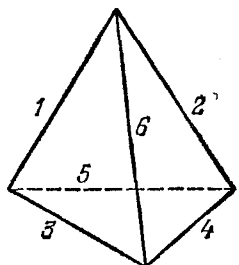

Рис. 124.

почленным делением первых двух уравнений находим искомое условие:

$$R_1/R_3=R_2/R_4.$$

6. В предыдущей схеме (см. рис. 123) гальванометр из диагонали перенесен в боковую сторону *1*, а ключ K — в противоположную боковую сторону *4*. При каком условии замыкание и размыкание ключа не будет влиять на показания гальванометра?

Ответ. $R_2/R_6 = R_5/R_3$.

Для получения ответа не требуется новых вычислений, если заметить, что обе схемы топологически эквивалентны, т. е. одна может быть получена из другой непрерывной деформацией. В этом проще всего убедиться, если перейти к пространственной схеме мостика Уитстона, в которой провода изображаются ребрами правильного тетраэдра (рис. 124).

§ 46. Стационарные токи в массивных проводниках

1. Пусть в проводящей однородной среде помещены два электрода A и B (рис. 125), электропроводность которых очень велика по сравнению с электропроводностью самой среды. В этих условиях изменениями потенциала внутри электродов можно пренебречь, т. е. считать, что все точки каждого электрода находятся при одном и том же потенциале. Будем поддерживать потенциалы электродов φ_1 и φ_2 постоянными. Поставим задачу о нахождении плотности тока, текущего между электродами. Эта задача математически эквивалентна электростатической задаче о поле конденсатора, обкладками которого служат рассматриваемые электроды. Действительно, поскольку токи стационарны, а среда однородна, в ней не могут появиться объемные электрические заряды. Значит, потенциал φ во всем пространстве между электродами должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ и принимать заданные значения φ_1 и φ_2 на электродах A и B. Задача об электрическом поле в конденсаторе формулируется в точности так же. Обе задачи математически тождественны и имеют единственные решения. Поэтому,

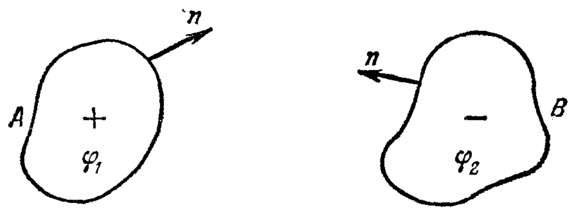

Рис. 125.

если пространство между электродами A и B заполнить однородным диэлектриком и поддерживать электроды при прежних потенциалах φ_1 и φ_2, то электрическое поле во всем пространстве вне электродов A и B останется неизменным. Найдя напряженность электрического поля E, можно вычислить затем и плотность тока по формуле $j = \lambda E$.

Вычисление полного тока $\mathcal{I}$ между электродами — задача еще более простая. Она сводится к вычислению емкости соответствующего конденсатора. Действительно, ток выражается интегралом

$$\mathcal{I} = \oint j_n\, dS = \lambda \oint E_n\, dS,$$

распространенным по поверхности положительно заряженного электрода A. Если задаче о токе сопоставить соответствующую электростатическую задачу, то по теореме Гаусса

$$\oint E_n\, dS = \frac{4\pi}{\varepsilon} q = \frac{4\pi}{\varepsilon} C(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где ε — диэлектрическая проницаемость межэлектродного пространства, а C — емкость конденсатора с обкладками A и B. Таким образом,

$$\mathcal{I} = \frac{4\pi C\lambda}{\varepsilon}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

С другой стороны, по закону Ома

$$\mathscr{I} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R},$$

где R — полное электрическое сопротивление проводящей среды между электродами A и B. Сравнивая обе формулы, получаем

$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi C\lambda}, \tag{46.1}$$

после чего находим ток $\mathscr{I}$. Как и следовало ожидать, сопротивление R не зависит от ε, так как емкость конденсатора C сама пропорциональна ε. Не меняя результата, можно было бы взять $\varepsilon = 1$.

Приведем конкретные примеры.

1) Электродами служат концентрические сферы с радиусами a и b. Используя формулу (26.5), получим

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \tag{46.2}$$

2) Электродами являются поверхности коаксиальных цилиндров с высотой l и радиусами a и b. Формулы (46.1) и (26.7) дают

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda l} \ln \frac{b}{a}. \tag{46.3}$$

3) Электродами являются два шарика радиуса a, удаленные друг от друга на большое расстояние. В этом случае

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda a}. \tag{46.4}$$

Сопротивление R не зависит от расстояния между шариками. Это объясняет результат, эмпирически найденный телеграфистами, обнаружившими, к своему удивлению, что сопротивление земли между телеграфными станциями не зависит от расстояния между ними.

2. Рассмотрим задачу о сопротивлении заземления в более общей постановке. На рис. 126 схематически изображены две станции *1* и *2*. Связь между ними осуществляется проводом *12*. Другим проводом служит земля. Вблизи каждого из заземленных металлических тел (электродов) A и B почва может считаться однородной средой с удельными проводимостями λ_1 и λ_2. Будем предполагать, что электроды A и B зарыты глубоко, так что влиянием границы между землей и атмосферой на общий ток, текущий между электродами, можно пренебречь. Пусть C_1 и C_2 — емкости электродов A и B, какими они были бы, если бы электроды были уединены и находились в вакууме. Ток $\mathscr{I}$, стекающий с положительного электрода A, зависит только от его потенциала φ_1 и электропроводности почвы в окрестности этого электрода. Он практически не зависит от свойств удаленных областей окружающей среды, а потому при вычислении $\mathcal{I}_1$ электропроводность всей среды можно считать постоянной и равной λ_1. Если потенциал бесконечно удаленных точек

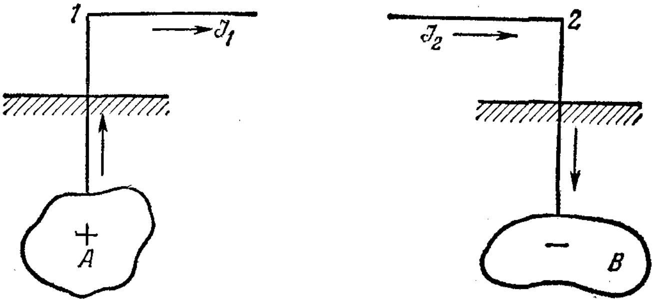

Рис. 126.

условиться считать равным нулю, то на основании формулы (46.1) можно написать

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\varphi_1}{R_1} = 4\pi C_1 \lambda_1 \varphi_1.$$

(Мы приняли $\varepsilon = 1$.) Аналогично, для тока $\mathcal{I}_2$, текущего к отрицательному электроду B, получаем

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{\varphi_2}{R_2} = -4\pi C_2 \lambda_2 \varphi_2.$$

Станции *1* и *2* соединены между собой проводом *12*, а потому $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}$. Используя это, из предыдущих формул находим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\mathcal{I}}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 C_1} + \frac{1}{\lambda_2 C_2}\right),$$

откуда следует, что сопротивление заземления равно

$$R = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 C_1} + \frac{1}{\lambda_2 C_2}\right). \qquad (46.5)$$

В выводе нигде не предполагалось, что весь ток с электрода A, текущий по земле, попадает на электрод B. Такое утверждение неправильно, хотя оно не отразилось бы на формуле (46.5). Было использовано только равенство токов $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, а оно обеспечивается тем, что электроды A и B соединены между собой проводом. Формула (46.5) показывает, что для получения хорошего заземления электроды A и B должны быть больших размеров. Кроме того, окружающая их почва должна обладать хорошей электропроводностью.

ЗАДАЧА

Имеется n идеально проводящих тел в вакууме с зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и потенциалами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Какое количество тепла будет выделяться ежесекундно, если пространство между этими телами заполнить однородной жидкостью с электропроводностью λ и диэлектрической проницаемостью ε, а потенциалы тел поддерживать при прежних значениях?

Решение. При заполнении пространства проводящей жидкостью электрическое поле между телами не изменится. Количество же ежесекундно выделяющегося тепла определится выражением $Q = \sum \mathcal{I}_k \varphi_k$. Ток, текущий с поверхности k-го проводника,

$$\mathcal{I}_k = \oint j_N \, dS,$$

где N — наружная нормаль к этой поверхности. Заряд на поверхности k-го проводника

$$q_k = \frac{1}{4\pi} \oint D_N dS = \frac{\varepsilon}{4\pi} \oint E_N \, dS.$$

В результате находим

$$Q = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \sum q_k \varphi_k.$$

§ 47. Электролитическая ванна

1. При конструировании электронных, ионных и многих других приборов надо знать электрические поля между электродами сложной конфигурации. Теоретический расчет таких полей практически невозможен. Экспериментальные измерения полей внутри самих приборов не всегда могут дать достаточную точность ввиду малости размеров отдельных деталей, вблизи которых необходимо измерить распределение поля, а также потому, что многие места внутри конструируемого прибора недоступны для введения зонда. Для экспериментального решения этой задачи применяется *метод электролитической ванны*. Изготовляются увеличенные подобные и подобно расположенные модели электродов, погружаемые затем в однородную слабо проводящую жидкость (электролит), например в водопроводную воду. Потенциалы электродов модели должны быть пропорциональны потенциалам соответствующих электродов прибора. При этом условии, как показано в предыдущем параграфе, модель воспроизведет в увеличенном масштабе эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля заряженных электродов. Поскольку исследуемое пространство теперь заполнено проводящей средой, измерение потенциалов легко осуществить с помощью зонда.

2. При практическом применении метода электролитической ванны возникают экспериментальные трудности. Одна из них заключается в следующем. Размеры ванны должны быть велики по сравнению с размерами исследуемой системы электродов. Сами