§ 48. Процессы установления тока при зарядке и разрядке конденсатора

1. Задачи о разрядке и зарядке конденсатора, строго говоря, выходят за рамки учения о постоянных токах. Приводимые ниже решения их получаются в предположении, что мгновенное значение тока одно и то же во всех поперечных сечениях провода, соединяющего обкладки конденсатора, а мгновенное электрическое поле такое же, как в электростатике при тех же зарядах на обкладках конденсатора. Токи и поля, удовлетворяющие этим условиям, называются *квазистационарными*. В дальнейшем будут точно сформулированы условия, при которых имеет место *квазистационарность* (см. § 123).

Если обкладки заряженного конденсатора соединить проводом, то по проводу потечет ток. Пусть $\mathscr{I}$, Q, φ — мгновенные значения тока, заряда положительной обкладки и разности потенциалов между обкладками. Считая ток в проводе положительным, когда он течет от положительной обкладки к отрицательной, можем написать

$$\mathscr{I}=-\frac{dQ}{dt}, \quad R\mathscr{I}=\varphi, \quad Q=C\varphi,$$

где C — емкость конденсатора, а R — сопротивление провода. Исключая φ и $\mathscr{I}$, получим

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{RC}=0. \tag{48.1}$$

После интегрирования этого уравнения придем к соотношению

$$Q=Q_0e^{-t/\tau}, \tag{48.2}$$

где Q_0 — начальное значение заряда конденсатора, а τ — постоянная:

$$\tau=RC, \tag{48.3}$$

имеющая размерность времени. Она называется *временем релаксации*. Через время τ заряд конденсатора убывает в e раз. Поэтому τ по порядку величины равно времени, в течение которого конденсатор разрядится. Дифференцируя (48.2) по t, находим закон изменения тока во времени:

$$\mathscr{I}=\frac{Q_0}{\tau}\exp\{-t/\tau\}=\mathscr{I}_0\exp\{-t/\tau\}, \tag{48.4}$$

где $\mathscr{I}_0=Q_0/\tau$ — начальное значение тока, т. е. ток при $t=0$.

Полезно запомнить, что время релаксации определяется формулой (48.3) *во всех системах единиц*. Так, если сопротивление измерять в омах, а емкость в фарадах, то время (48.3) получится в секундах.

2. Аналогично решается задача о зарядке конденсатора. Пусть в цепь конденсатора включена гальваническая батарея или какой-либо другой источник тока с постоянной электродвижущей силой $\mathscr{E}$. Источник возбуждает ток, заряжающий конденсатор. Электрические заряды на обкладках конденсатора препятствуют прохождению тока и уменьшают его. Уравнение $Q = C\varphi$ остается неизменным. Остальные два уравнения запишутся следующим образом:

$$\mathscr{I} = \frac{dQ}{dt}, \qquad R\mathscr{I} = \mathscr{E} - \varphi,$$

где R означает полное сопротивление провода, соединяющего обкладки конденсатора, включая внутреннее сопротивление батареи. (Теперь ток в проводе считается положительным, когда он течет в направлении к положительной обкладке.) Исключая снова $\mathscr{I}$ и φ, придем к уравнению

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\mathscr{E}}{R}. \tag{48.5}$$

Это неоднородное уравнение сведется к однородному, если его записать в виде

$$\frac{d}{dt}(Q - \mathscr{E}C) + \frac{Q - \mathscr{E}C}{RC} = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$Q - \mathscr{E}C = Ae^{-t/\tau}.$$

Значение постоянной интегрирования A найдется из условия, что в начальный момент времени конденсатор не заряжен, т. е. в этот момент $Q = 0$. Это дает $A = -\mathscr{E}C$, и, следовательно,

$$Q = \mathscr{E}C\,(1 - e^{-t/\tau}). \tag{48.6}$$

При $t \to \infty$ заряд Q стремится к предельному значению $Q_\infty = \mathscr{E}C$. Для тока получаем

$$\mathscr{I} = \frac{\mathscr{E}C}{\tau}\, e^{-t/\tau} = \frac{\mathscr{E}}{R}\, e^{-t/\tau}. \tag{48.7}$$

Ток максимален в начальный момент и равен $\mathscr{I}_0 = \mathscr{E}/R$. В дальнейшем он убывает по экспоненциальному закону.

3. Если пространство между заряженными электродами заполнено непрерывной средой с электропроводностью λ и диэлектрической проницаемостью ε, то можно воспользоваться формулой (46.1). Тогда для времени релаксации получим

$$\tau = RC = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda} = \frac{\varepsilon\rho}{4\pi}. \tag{48.8}$$

Для меди $\rho = 1{,}7\cdot10^{-6}$ Ом·см $= 1{,}9\cdot10^{-18}$ с. Формальная подстановка в формулу (48.8) дала бы $\tau \approx 10^{-19}$ с, что примерно в сто тысяч раз превосходит инерционное время электронов (см. § 42, пункт 5). Это показывает, что формула (48.8) к металлам неприменима: за время 10^{-19} с электрическое состояние не может распространиться более чем на $3\cdot10^{10}\cdot10^{-19} = 3\cdot10^{-9}$ см. Значит, условие квазистационарности, использованное при выводе формулы (48.8), в случае металлов не выполняется. Заряженное тело, окруженное металлом, будет терять заряд значительно медленнее (но все же практически мгновенно), чем это следует из формулы (48.8). Практически область применимости формулы (48.8) ограничивается только диэлектриками. Идеальных изоляторов, совершенно не проводящих электричество, не существует. Однако их электропроводность на много порядков меньше, чем у металлов. Так, для эбонита $\rho = 10^{16}$ Ом·см $= 1{,}1\cdot10^{4}$ с, что превосходит удельное сопротивление меди в 10^{22} раз. Диэлектрическая проницаемость эбонита $\varepsilon = 2{,}7$, а время релаксации $\tau = 2{,}4\cdot10^{3}$ с $= 40$ мин.

ЗАДАЧИ

1. К заряженному до напряжения V_0 конденсатору с емкостью C_1 подключается незаряженный конденсатор с емкостью C_2 (рис. 128). Найти зависимость тока в цепи от времени, если сопротивление проводов, соединяющих обкладки

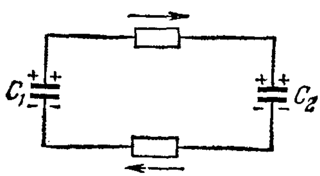

Рис. 128.

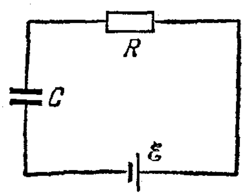

Рис. 129.

конденсаторов, равно R. Какое количество тепла выделится в проводах в результате прохождения тока?

Ответ: $\mathscr{I} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{R}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)}$; $Q = \frac{C_1C_2}{2(C_1+C_2)} V_0^2$.

2. Пластины воздушного конденсатора емкости $C = 10^{-10}$ Ф соединены сопротивлением R через батарею с электродвижущей силой $\mathscr{E}$ (рис. 129). Пластины быстро сближают в течение времени $\Delta t = 10^{-2}$ с, уменьшая расстояние между ними вдвое. При каком условии за это время заряд конденсатора практически не изменится? Найти джоулево тепло, которое выделится в сопротивлении R к моменту окончания перезарядки.

Ответ. $R \gg \Delta t/C \approx 10^{8}$ Ом; $Q_{\text{дж}} = \frac{1}{4} C\mathscr{E}^2$.