ляющие dB_τ, создаваемые отдельными поверхностными элементами тока. Поскольку величина i постоянна по всей поверхности соленоида, формула (51.6) дает

$$B = \frac{i}{c}\,\Omega, \tag{51.7}$$

где Ω — полный телесный угол, под которым из точки наблюдения видна внутренняя поверхность соленоида. Формула (51.7) верна независимо от того, находится ли точка наблюдения внутри или вне соленоида.

В частном случае, когда соленоид длинный, а точка наблюдения лежит внутри него далеко от его концов, можно пренебречь телесными углами, под которыми видны основания трубки соленоида. Иными словами, соленоид можно считать бесконечно длинным. В таком случае $\Omega = 4\pi$, т. е.

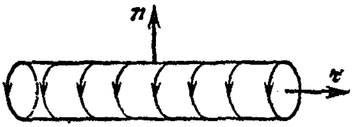

Рис. 141.

$$B = \frac{4\pi}{c}\,i. \tag{51.8}$$

На концах соленоида напряженность поля будет вдвое меньше. В дальнейшем будет показано, что формула (51.8) справедлива в любой точке внутри соленоида, а не только на его оси.

Проволочную спираль, шаг которой мал по сравнению с радиусом витка, можно приближенно рассматривать как соленоид. Пусть по спирали течет постоянный ток $\mathscr{I}$. Если N — число витков спирали, а l — ее длина, то $i = N\mathscr{I}/l$. Поэтому

$$B = \frac{4\pi}{c}\,\frac{N\mathscr{I}}{l}. \tag{51.9}$$

Эта формула не учитывает наклон витков спирали. Кроме того, она неприменима в непосредственной близи от проволоки, а также внутри нее.

§ 52. Момент сил, действующих на виток с током в магнитном поле

1. Результирующая сила, действующая на виток с током в постоянном магнитном поле, дается выражением

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathscr{I}}{c}\oint [d\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}],$$

где интегрирование производится по контуру витка. Если магнитное поле однородно, то вектор $\boldsymbol{B}$ можно вынести из-под знака интеграла. Задача сведется к вычислению векторного интеграла $\oint d\boldsymbol{l}$, а такой интеграл равен нулю. Значит, в однородном поле равна нулю и сила $\boldsymbol{F}$. Однако момент этой силы M, вообще говоря, в нуль не обращается. Займемся его вычислением.

2. Рассмотрим сначала плоский виток, плоскость которого параллельна магнитному полю $\boldsymbol{B}$ (рис. 142). Проведя достаточно часто магнитные силовые линии, разобьем виток на пары элементов тока $\mathscr{I}\, dl_1$ и $\mathscr{I}\, dl_2$. Действующие на них амперовы силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ перпендикулярны к плоскости витка и противоположны по направлению. По закону Ампера $F_1 = \mathscr{I} B\, dl_1 \sin\alpha/c = \mathscr{I} B\, dh/c$, где dh — высота криволинейного четырехугольника $AECD$. Тем же выражением определяется величина силы F_2. Таким образом, $F_1 = F_2$, т. е. $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ образуют пару сил с моментом $dM = \mathscr{I} Ba\, dh/c = \mathscr{I} B\, dS/c$, где a — плечо пары, а dS — площадь четырехугольника $AECD$. Интегрированием получаем $M = \mathscr{I} BS/c$, где S — площадь, охватываемая рассматриваемым витком тока. Вращающий момент $\boldsymbol{M}$ направлен вертикально вверх.

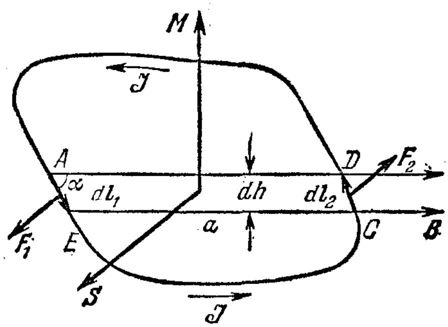

Рис. 142.

Введем вектор площади контура $\boldsymbol{S}$, образующий с направлением тока правовинтовую систему. (Вектор $\boldsymbol{S}$ перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен к читателю.) Тогда полученный результат можно записать в векторной форме:

$$\boldsymbol{M} = [\mathfrak{M}\boldsymbol{B}], \tag{52.1}$$

где введено обозначение

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathscr{I}}{c}\boldsymbol{S}. \tag{52.2}$$

Вектор $\mathfrak{M}$ называется *магнитным моментом тока.*

Допустим теперь, что плоскость витка перпендикулярна к магнитному полю. В этом случае амперова сила $d\boldsymbol{F} = \mathscr{I}\,[d\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{B}]/c$, действующая на элемент тока $\mathscr{I}\, d\boldsymbol{l}$, будет лежать в плоскости витка и равна по величине $\mathscr{I} B\, dl/c$. Такие силы, в зависимости от направления тока, будут только растягивать или сжимать виток. Однако их момент равен нулю. В этом нетрудно убедиться, когда виток имеет форму прямоугольника или треугольника (рис. 143). (Точки означают, что магнитное поле перпендикулярно к плоскости рисунка и направлено к читателю.) Но к этим частным случаям сводится и общий случай, когда форма (плоского) витка произвольна. Достаточно провести прямые, разбивающие плоскость витка на бесконечно малые прямоугольники и треугольники, и вообразить, что по этим прямым в противоположных направлениях пропущены равные токи силою $\mathscr{I}$ (рис. 144). Добавление таких токов ничего не меняет, так как полный ток, текущий по каждой вспомогательной прямой, равен нулю. Однако теперь полный момент M может быть представлен в виде суммы моментов,

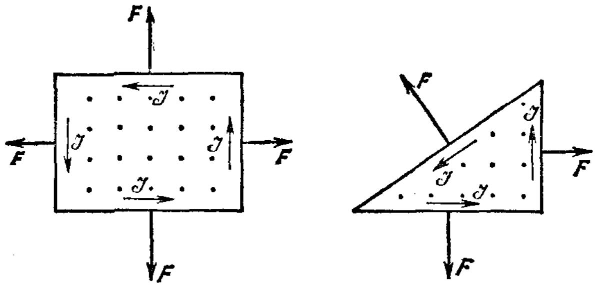

Рис. 143.

действующих на элементарные прямоугольники и треугольники. Поскольку эти моменты равны нулю, будет равен нулю и полный момент M.

Рассмотрим, наконец, случай, когда магнитное поле направлено под углом к плоскости контура. Представим вектор $\boldsymbol{B}$ в виде $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\parallel} + \boldsymbol{B}_{\perp}$, где $\boldsymbol{B}_{\parallel}$ — составляющая вектора $\boldsymbol{B}$, параллельная, а $\boldsymbol{B}_{\perp}$ — перпендикулярная к плоскости контура. Вторая составляющая не вносит вклада в момент M. Поэтому $M = [\mathfrak{M}\boldsymbol{B}_{\parallel}] = [\mathfrak{M}\boldsymbol{B}]$. Таким образом, и в этом случае справедлива формула (52.1).

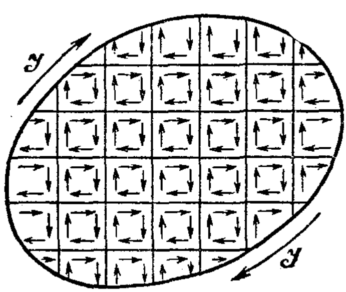

Рис. 144.

Формула (52.1) верна и в том случае, когда контур тока не плоский, однако магнитное поле однородно. Чтобы убедиться в этом, натянем на контур с током произвольную поверхность S и разобьем ее вспомогательными линиями на элементарные площадки dS подобно тому, как это сделано на рис. 144. Пропустив по этим вспомогательным линиям равные и противоположно направленные токи силою $\mathscr{I}$, представим момент M в виде суммы моментов, действующих на такие элементарные площадки. Но каждая площадка, ввиду ее бесконечной малости, может рассматриваться как плоская и к ней применима формула (52.1). Сложив моменты, действующие на элементарные площадки, снова получим формулу (52.1), причем магнитный момент тока $\mathfrak{M}$ будет определяться прежним выражением (52.2), в котором под вектором S следует понимать векторный интеграл $\boldsymbol{S}=\int d\boldsymbol{S}$, взятый по поверхности S, натянутой на контур тока. Вектор $\boldsymbol{S}$ не зависит от выбора вспомогательной поверхности S, а только от контура, на который она натянута.

Формула (52.1) справедлива и для соленоида, поскольку последний можно рассматривать как систему кольцевых токов. Магнитный момент соленоида, очевидно, определяется прежней формулой (52.2), если под $\mathcal{I}$ понимать полный ток, текущий по боковой поверхности соленоида, а под S — площадь его поперечного сечения. Для проволочной спирали с малым шагом, состоящей из N витков, $\mathfrak{M} = N\mathcal{I}\boldsymbol{S}/c$.

3. Под действием вращающего момента $\boldsymbol{M}$ виток или катушка будут поворачиваться так, чтобы векторы $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{B}$ стали параллельными и одинаково направленными. Это — положение устойчивого равновесия. В положении, когда $\mathfrak{M}$ и $\boldsymbol{B}$ параллельны и направлены противоположно, также имеет место равновесие, но такое равновесие неустойчивое.

Формула (52.1) приближенно применима и для неоднородных магнитных полей. Необходимо только, чтобы размеры витка или катушки были малы. Тогда влиянием неоднородности поля на вращающий момент можно пренебречь. Такие витки и катушки могут быть использованы для практических измерений магнитных полей. Тогда они называются *пробными*. Пробные витки и катушки играют в магнитных измерениях ту же роль, что и пробные заряды в электрических измерениях. Если пробную катушку поместить в магнитное поле, то ее магнитный момент $\mathfrak{M}$ установится вдоль поля $\boldsymbol{B}$. Повернем катушку из этого положения на 90°, чтобы вращающий момент $\boldsymbol{M}$ обратился в максимум. Тогда магнитный момент $\mathfrak{M}$ будет перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{B}$, т. е. $(\mathfrak{M}\boldsymbol{B}) = 0$. Поэтому, умножая равенство (52.1) векторно на $\mathfrak{M}$, получим

$$\boldsymbol{B}=\frac{[\boldsymbol{M}\mathfrak{M}]}{\mathfrak{M}^2}. \tag{52.3}$$

Измерив вращающий момент $\boldsymbol{M}$, можно по этой формуле найти напряженность магнитного поля как по величине, так и по направлению. В частности, такие измерения позволяют проверить закон Био и Савара в интегральной форме (50.11).

§ 53. Теорема Гаусса для магнитных полей

Изучение электрического поля мы начали с установления *элементарного закона*, определяющего напряженность электрического поля неподвижного точечного заряда. Из этого закона были выведены две *интегральные теоремы*: о потоке вектора $\boldsymbol{E}$ через замкнутую поверхность и о циркуляции того же вектора по замкнутому