

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (53.2)$$

В учении об электрическом поле соответствующие уравнения имели вид

$$\oint (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 4\pi q, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho.$$

Можно было бы предполагать, как это делалось на ранней стадии учения о магнетизме, что источниками магнитного поля являются *магнитные заряды*, взаимодействующие по закону Кулона. Однако такое предположение не согласуется с формулой (53.1). Она показывает, что *магнитных зарядов не существует*. Понятно, что справедливость столь фундаментального результата не может ограничиваться рамками учения о постоянных магнитных полях. Поэтому естественно ожидать, что *уравнение (53.1) или эквивалентное ему уравнение (53.2) справедливы также для любых магнитных полей*. Все опытные факты подтверждают это заключение. Уравнения (53.1) и (53.2) входят как составные части в *систему уравнений Максвелла*.

Силовые поля, дивергенция которых всюду обращается в нуль, называются *бездивергентными* или *соленоидальными полями*. Следовательно, *магнитное поле есть поле соленоидальное. Его источниками являются не магнитные заряды, а электрические токи*.

§ 54. Дополнительные сведения о телесных углах

1. О телесных углах говорилось в § 5. Для дальнейшего понятие телесного угла необходимо обобщить. Возьмем произвольный замкнутый контур L и натянем на него произвольную замкнутую поверхность S (рис. 146, а). На контуре L

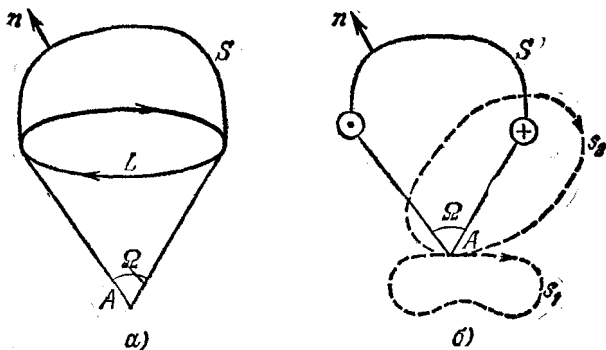


Рис. 146.

установим положительное направление обхода, а на поверхности S — положительное направление нормали \mathbf{n} . Эти направления должны быть согласованы

между собой так, чтобы они находились в правовинтовом соотношении. Для упрощения рассуждений будем пользоваться плоскими, а не пространственными рисунками. Сечение замкнутого контура L плоскостью рисунка изобразим двумя кружками. Кружок с точкой внутри него означает, что контур пересекает плоскость рисунка в направлении к читателю, а кружок с крестиком — в направлении от читателя. Как и раньше, сторону поверхности S , в которую нормаль n входит, условимся называть *внутренней*, а сторону, из которой она выходит, — *внешней*. Телесный угол Ω мы считали *положительным*, когда из его вершины видна внутренняя сторона поверхности S , и *отрицательным*, когда видна внешняя. Временно сохраним это соглашение и здесь.

2. При перемещении вершины телесного угла его величина Ω меняется, вообще говоря, непрерывно. Исключение составляет случай, когда вершина A пересекает поверхность S . Тогда телесный угол получает скачкообразное приращение, равное $+4\pi$, если точка A переходит с внешней стороны на внутреннюю, и -4π , если переход совершается в противоположном направлении.

Для пояснения рассмотрим сначала частный случай, когда контур L и поверхность S плоские. Если вершина A находится бесконечно близко от плоскости S с внешней стороны, то эта плоскость видна из вершины под углом -2π . Если же вершина переходит на внутреннюю сторону, то телесный угол становится равным $+2\pi$, т. е. получает приращение 4π . Допустим теперь, что поверхность ACB , натянутая на контур L , произвольная (рис. 147). Пусть 1 и 2 — две бесконечно близкие точки, лежащие по разные стороны от поверхности ACB .

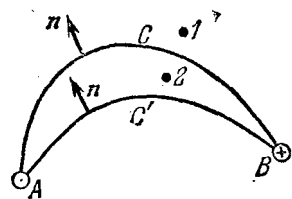


Рис. 147.

близкую поверхность $AC'B$ так, чтобы обе точки 1 и 2 оказались по одну сторону от нее. Телесные углы Ω'_1 и Ω'_2 , под которыми видна из точек 1 и 2 эта поверхность, будут отличаться друг от друга бесконечно мало, причем $\Omega'_1 = \Omega_1$. Возьмем теперь замкнутую поверхность $ACBC'A$. Так как на ACB нормаль n проведена наружу, а на $AC'B$ — внутрь указанной замкнутой поверхности, то из точки 2 поверхность $ACBC'A$ будет видна под углом $\Omega_2 - \Omega'_2$. А так как эта поверхность замкнутая, то тот же угол равен 4π , т. е. $\Omega_2 - \Omega'_2 = 4\pi$. Но, очевидно, с точностью до бесконечно малых $\Omega'_2 = \Omega'_1 = \Omega_1$, а потому $\Omega_2 - \Omega_1 = 4\pi$, что и требовалось доказать.

3. Разрывное поведение телесного угла Ω делает эту величину неудобной при рассмотрении замкнутых контуров, обтекаемых токами. Действительно, точка разрыва величины Ω зависит от того, где проведена вспомогательная поверхность S , натянутая на контур L . Магнитное же поле тока, текущего по указанному контуру, ни от каких вспомогательных поверхностей не зависит. Однако небольшим обобщением понятия телесного угла нетрудно освободить это понятие от указанного неудобства. Для этого телесный угол надо определить как *многозначную* (точнее, *бесконечнозначную*) *функцию положения его вершины*. Если вершина занимает какое-то произвольное (начальное) положение, то телесный угол можно определить так, как это делалось выше. Когда вершина A описывает произвольный замкнутый путь s_1 (рис. 146, б), возвращаясь в исходное положение, не пересекая при этом (или пересекая в противоположных направлениях четное число раз) никакой поверхности, натянутой на контур L , то телесный угол Ω возвращается к своему исходному значению. Если же замкнутый путь s_2 обходит вокруг контура L , то телесный угол получает приращение 4π ; при обходе в отрицательном направлении приращение телесного угла будет -4π . Так понимаемый телесный угол Ω определен с точностью до слагаемого вида $4\pi n$, где n — целое число (положительное или отрицательное). При непрерывном перемещении вершины A телесный угол меняется непрерывно. Величина его не зависит ни от какой поверхности, натянутой на контур L . Она определяется только самим контуром L и установленным на нем положительным на-

правлением обхода. Поэтому следует говорить о телесном угле, под которым виден *сам контур* L , а не поверхность, натянутая на него. Именно в таком смысле мы будем понимать телесный угол, когда в следующем параграфе свяжем эту величину с напряженностью магнитного поля.

4. Рассмотрим теперь дифференцирование телесных углов. Пусть контур, на который опирается телесный угол Ω , неподвижно закреплен. Тогда величина телесного угла Ω будет зависеть только от положения его вершины. Найдем производные величины Ω по координатам x, y, z этой вершины. При смещении вершины на dr (рис. 148, а) телесный угол получает приращение $d\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$. Такое же приращение он получил бы, если бы закрепить неподвижно вершину, а контур, как целое, сместить в противоположном направлении на $-dr$ (рис. 148, б).

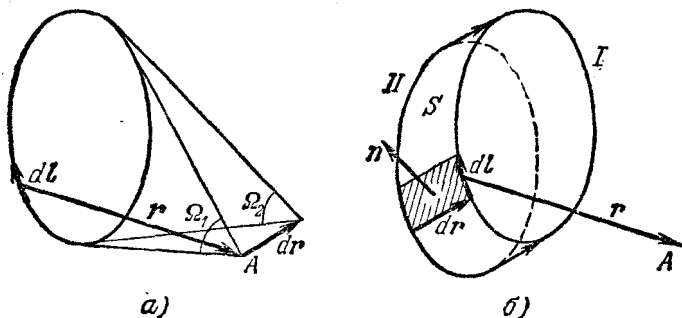


Рис. 148.

При таком смещении точки контура опишет цилиндрическую поверхность S , которая видна из вершины A под телесным углом $\Omega_{\text{бок}}$. Как видно из рисунка, $\Omega_1 = \Omega_2 + \Omega_{\text{бок}}$, т. е. $d\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = -\Omega_{\text{бок}}$. Телесный угол $\Omega_{\text{бок}}$ определяется выражением

$$\Omega_{\text{бок}} = - \int \frac{(dS r)}{r^3},$$

где dS — элемент площади боковой поверхности, причем радиус-вектор r проведен от площадки dS к вершине телесного угла, а единичная нормаль n к цилиндрической поверхности направлена наружу, как указано на рисунке. Если dl — элемент длины контура, то при таком выборе единичной нормали $dS = [dr dl]$. Подставляя это выражение в предыдущее и вынося dr из-под знака интеграла, получим

$$\Omega_{\text{бок}} = - \oint \frac{[dr dl] r}{r^3} = - dr \oint \frac{[dl r]}{r^3} = - a dr,$$

где введено обозначение

$$a = \oint \frac{[dl r]}{r^3}.$$

Интегрирование здесь ведется по контуру, на который опирается телесный угол. Таким образом, $d\Omega = a dr = a_x dx + a_y dy + a_z dz$. Отсюда находим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = a_z,$$

или в векторной форме

$$\text{grad } \Omega = \oint \frac{[dl r]}{r^3}. \quad (54.1)$$