§ 55. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме

1. Линейный интеграл $\int\limits_{12} \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}$, называемый *магнитным напряжением* между точками 1 и 2, зависит не только от положения этих точек, но и от пути интегрирования. Его значение становится определенным только после указания этого пути. Предположим сначала, что магнитное поле $\boldsymbol{B}$ создается постоянным током $\mathcal{I}$, текущим по бесконечно тонкому замкнутому витку. Напряженность такого поля определяется выражением (50.11), или в силу формулы (54.1)

$$\boldsymbol{B} = -\operatorname{grad} \varphi_m, \tag{55.1}$$

где

$$\varphi_m = -\frac{\mathcal{I}}{c}\Omega, \tag{55.2}$$

а Ω — телесный угол, под которым виток с током виден из точки наблюдения. Величина φ_m называется *магнитным потенциалом*. Магнитный потенциал, как и телесный угол Ω, является *многозначной (бесконечнозначной) функцией* точки наблюдения. Магнитное напряжение выражается через магнитный потенциал соотношением

$$\int\limits_{12} \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = -\int\limits_{12} d\varphi_m = \varphi_{m1} - \varphi_{m2}. \tag{55.3}$$

2. Допустим, что точки 1 и 2 совпадают, т. е. путь интегрирования становится замкнутым. Тогда магнитное напряжение переходит в *циркуляцию* $\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}$ вдоль этого замкнутого пути. Из свойств телесных углов, установленных в предыдущем параграфе, следует, что циркуляция $\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}$ будет равна нулю, если путь интегрирования не обходит вокруг тока. Если же он обходит вокруг тока один раз, то

$$\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = \frac{4\pi}{c}\mathcal{I}. \tag{55.4}$$

Ток $\mathcal{I}$ считается положительным, если его направление находится в правовинтовом соотношении с направлением пути обхода.

Допустим теперь, что магнитное поле создается несколькими замкнутыми бесконечно тонкими витками с постоянными токами. К таким виткам с токами сводится и общий случай, так как постоянные токи всегда замкнуты и пространство, обтекаемое ими, можно разбить на бесконечно тонкие замкнутые токовые линии, которые и будут играть роль бесконечно тонких витков. Магнитные поля отдельных витков удовлетворяют принципу суперпозиции, а циркуляции этих полей по одному и тому же замкнутому контуру складываются алгебраически. Поэтому и в общем случае получается формула (55.4). Только в ней под $\mathscr{I}$ следует понимать сумму токов всех проводников, вокруг которых обходит контур циркуляции. В результате доказано следующее положение: *циркуляция магнитного поля постоянных токов по всякому замкнутому контуру равна сумме токов, пронизывающих контур циркуляции, умноженной на* $4\pi/c$. Это положение называется *теоремой о циркуляции* вектора напряженности магнитного поля.

Если объемная плотность тока $\boldsymbol{j}$ конечна, то $\mathscr{I}=\int\limits_S j_n\,dS=\int\limits_S (\boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{S})$, где S — любая поверхность, натянутая на контур, по которому вычисляется циркуляция. В этом случае формула (55.4) перейдет в

$$\oint (\boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s})=\frac{4\pi}{c}\int (\boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{S}). \tag{55.5}$$

В тех областях пространства, где не текут электрические токи, циркуляция $\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s}$ обращается в нуль по любому замкнутому контуру, т. е. в таких областях магнитное поле *потенциально*. Однако, как видно из формулы (55.5), этого не будет там, где текут электрические токи. Там магнитное поле *не потенциально*.

3. В учении о магнитном поле постоянных токов теорема о циркуляции играет примерно ту же роль, что и теорема Гаусса в электростатике. При наличии определенной симметрии теорема о циркуляции позволяет иногда очень просто рассчитать напряженность магнитного поля. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Магнитное поле бесконечного прямолинейного провода с током. Ввиду симметрии магнитные силовые линии имеют форму окружностей с центрами на оси тока (рис. 138). Длина вектора $\boldsymbol{B}$ одна и та же во всех точках силовой линии. Циркуляция магнитного поля вдоль силовой линии, с одной стороны, равна $2\pi RB$. С другой стороны, по теореме о циркуляции та же величина равна $4\pi\mathscr{I}/c$. Приравнивая оба выражения, получим

$$B=\frac{2\mathscr{I}}{cR}. \tag{55.6}$$

Этот результат уже был найден в § 51 непосредственно интегрированием магнитных полей элементов тока.

Рассмотрим теперь бесконечно длинный прямой цилиндрический провод радиуса a, по которому течет ток $\mathscr{I}$ с постоянной плотностью. Нетрудно видеть, что наружное поле будет определяться прежней формулой (55.6). Остается найти поле внутри провода. Конечно, и там магнитные силовые линии будут коаксиальными окружностями. Одна из них изображена на рис. 149 пунктиром.

Циркуляция вектора $\boldsymbol{B}$ по этой линии равна, с одной стороны, $2\pi RB$. С другой стороны, по теореме о циркуляции та же величина равна $4\pi\mathcal{J}'/c$, где $\mathcal{J}' = \mathcal{J}R^2/a^2$ — ток, пронизывающий рассматриваемый контур. Сравнивая эти выражения, находим

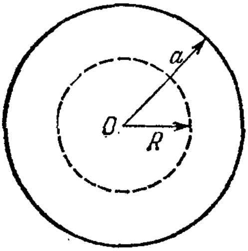

Рис. 149.

$$B = \frac{2\mathcal{J}}{ca^2}R \qquad (R < a). \qquad (55.7)$$

Если провод полый, а поверхностная плотность тока постоянна, то вне цилиндра по-прежнему верна формула (55.6). Поле внутри цилиндра в этом случае равно нулю.

Пример 2. Магнитное поле бесконечно длинного соленоида. Пусть поверхностная плотность тока i, циркулирующего по поверхности соленоида, одна и та же по всей длине соленоида. Покажем, что магнитное поле, если оно отлично от нуля, должно быть направлено параллельно оси соленоида. Возьмем

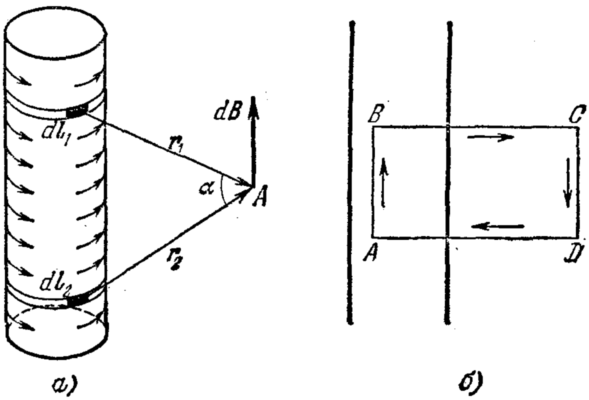

Рис. 150.

два элемента тока $\mathcal{J}\,dl_1$ и $\mathcal{J}\,dl_2$, симметрично расположенных относительно точки наблюдения A, как это изображено на рис. 150, *а*. По закону Био и Савара результирующее магнитное поле этих двух элементов в точке A дается выражением

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mathcal{J}}{cr_1^3}[d\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{r}_1] + \frac{\mathcal{J}}{cr_2^3}[d\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{r}_2] = \frac{\mathcal{J}}{cr_1^3}[d\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)].$$

Так как векторы $d\boldsymbol{l}_1$ и $(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)$ перпендикулярны к оси соленоида, то поле $d\boldsymbol{B}$ параллельно этой оси. Всю поверхность бесконечного соленоида можно разбить на пары элементов, аналогичных $d\boldsymbol{l}_1$ и

dl_2. Магнитное поле каждой такой пары параллельно оси соленоида. Следовательно, то же справедливо и для полного поля соленоида. Доказательство справедливо независимо от того, где лежит точка наблюдения A — внутри или вне соленоида.

Исследуем, как ведет себя магнитное поле бесконечного соленоида при удалении точки наблюдения A в бесконечность. Как будет доказано в § 57, магнитное поле отдельного витка на больших расстояниях убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Рассмотрим конечный участок соленоида, который виден из точки A под углом α (рис. 150, *а*). Разобьем его на большое число N кольцевых токов. Будем удалять точку A в бесконечность, сохраняя угол α и число N неизменными. При этом сила каждого кольцевого тока будет возрастать пропорционально длине выделенной части соленоида, а значит, и расстоянию до точки наблюдения. Если бы сила тока не изменялась, то из-за увеличения расстояния происходило бы убывание поля — обратно пропорционально кубу расстояния, как указано выше. Из-за увеличения силы тока убывание будет более медленным — обратно пропорционально квадрату расстояния. Но и в этом случае магнитное поле выделенной части соленоида, как и поле всего бесконечного соленоида, на бесконечности обратится в нуль.

Применим теперь теорему о циркуляции к прямоугольному контуру $ABCD$, сторона AB которого проходит внутри соленоида, а сторона CD бесконечно удалена (рис. 150, *б*). Участки BC и AD не вносят никакого вклада в циркуляцию, так как магнитное поле к ним перпендикулярно. По доказанному выше не дает вклада и сторона CD. Вся циркуляция сводится к интегралу по стороне AB и представляется выражением Bl, где l — длина стороны AB. По теореме о циркуляции та же величина равна $4\pi\mathcal{I}/c = 4\pi il/c$. Сравнением обоих выражений находим

$$B = \frac{4\pi}{c} i. \tag{55.8}$$

Этот результат справедлив не только для круглого соленоида, но и для соленоида с произвольным поперечным сечением. Внутри бесконечного соленоида магнитное поле однородно, а снаружи — равно нулю.

Формула (55.8) с хорошей точностью применима к средней части соленоида конечной длины вдали от его краев. Вблизи краев магнитное поле сильно искажается и становится неоднородным.

Для катушки с проволочной обмоткой

$$B = \frac{4\pi}{c} \frac{N\mathcal{I}}{l}, \tag{55.9}$$

где N — число витков, l — длина катушки, а $\mathcal{I}$ — сила тока в ее обмотке. Эта формула лишь приближенно представляет магнитное поле реального соленоида. Помимо искажения поля вблизи концов соленоида, однородность его нарушается в непосредственной близости каждого витка. Реальный ток лишь приближенно аппроксимируется поверхностным током с постоянной линейной плотностью. Вблизи каждого витка магнитные силовые линии обвиваются вокруг него. Кроме того, из-за наклона витков к оси соленоида имеется слагающая тока, параллельная этой оси. Она также искажает поле.

Пример 3. Магнитное поле тороидальной катушки. Заменим реальную катушку идеальным тором, по поверхности которого циркулирует ток с постоянной линейной плотностью i (рис. 151). Линии тока лежат в меридианальных плоскостях, т. е. в плоскостях, проходящих через ось AA системы. При повороте тора вокруг оси AA на любой угол он совмещается сам с собою. То же произойдет с магнитными силовыми линиями, если их повернуть, оставляя тор неподвижным. Отсюда следует, что силовыми линиями будут окружности с центрами на оси AA. Возьмем внутри тора одну из таких окружностей радиуса R (на рис. 151 она изображена пунктиром). Циркуляция магнитного поля вдоль этой окружности равна $2\pi RB$. Полный ток, пронизывающий площадь, ограниченную этой окружностью, равен $N\mathcal{I}$, где N — число витков в тороидальной катушке. По теореме о циркуляции $2\pi RB = 4\pi N\mathcal{I}/c$, а потому

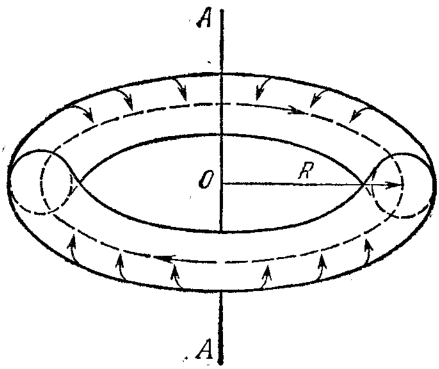

Рис. 151.

$$B = \frac{2}{cR} N\mathcal{I}. \tag{55.10}$$

Таким образом, внутри тора магнитное поле совпадает с полем прямого тока силою $N\mathcal{I}$, текущего вдоль оси AA. Вне тора магнитное поле равно нулю. Устремляя N и R к бесконечности так, чтобы отношение $i = N\mathcal{I}/(2\pi R)$ оставалось постоянным, в пределе получим выражение (55.8) для магнитного поля бесконечно длинного соленоида.

§ 56. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции

1. Теореме о циркуляции можно придать дифференциальную форму, эквивалентную интегральной форме (55.4) или (55.5). С этой целью применим теорему о циркуляции к бесконечно малому прямоугольному контуру $ABCD$ со сторонами dy и dz, плоскость