соленоида, однородность его нарушается в непосредственной близости каждого витка. Реальный ток лишь приближенно аппроксимируется поверхностным током с постоянной линейной плотностью. Вблизи каждого витка магнитные силовые линии обвиваются вокруг него. Кроме того, из-за наклона витков к оси соленоида имеется слагающая тока, параллельная этой оси. Она также искажает поле.

Пример 3. Магнитное поле тороидальной катушки. Заменим реальную катушку идеальным тором, по поверхности которого циркулирует ток с постоянной линейной плотностью i (рис. 151). Линии тока лежат в меридианальных плоскостях, т. е. в плоскостях, проходящих через ось AA системы. При повороте тора вокруг оси AA на любой угол он совмещается сам с собою. То же произойдет с магнитными силовыми линиями, если их повернуть, оставляя тор неподвижным. Отсюда следует, что силовыми линиями будут окружности с центрами на оси AA. Возьмем внутри тора одну из таких окружностей радиуса R (на рис. 151 она изображена пунктиром). Циркуляция магнитного поля вдоль этой окружности равна $2\pi RB$. Полный ток, пронизывающий площадь, ограниченную этой окружностью, равен $N\mathscr{I}$, где N — число витков в тороидальной катушке. По теореме о циркуляции $2\pi RB = 4\pi N\mathscr{I}/c$, а потому

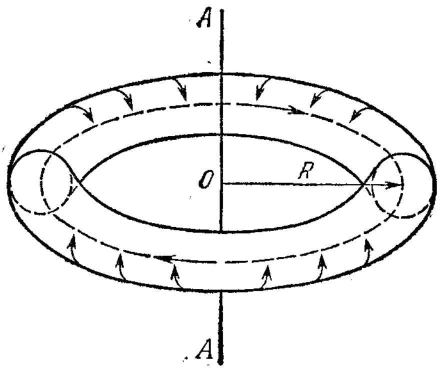

Рис. 151.

$$B = \frac{2}{cR} N\mathscr{I}. \tag{55.10}$$

Таким образом, внутри тора магнитное поле совпадает с полем прямого тока силою $N\mathscr{I}$, текущего вдоль оси AA. Вне тора магнитное поле равно нулю. Устремляя N и R к бесконечности так, чтобы отношение $i = N\mathscr{I}/(2\pi R)$ оставалось постоянным, в пределе получим выражение (55.8) для магнитного поля бесконечно длинного соленоида.

§ 56. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции

1. Теореме о циркуляции можно придать дифференциальную форму, эквивалентную интегральной форме (55.4) или (55.5). С этой целью применим теорему о циркуляции к бесконечно малому прямоугольному контуру $ABCD$ со сторонами dy и dz, плоскость которого перпендикулярна к оси X (рис. 152). Вклад в циркуляцию, вносимый стороной AB, равен $B_y(x, y, z)\,dy$. Противоположная сторона CD вносит в циркуляцию слагаемое $-B_y(x, y, z+dz)\,dy$. Сумма этих величин равна

$$-B_y(x, y, z+dz)\,dy + B_y(x, y, z)\,dy = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\,dy\,dz = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\,dS,$$

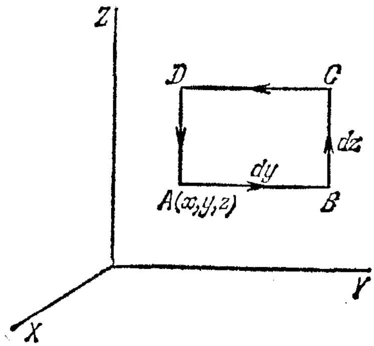

Рис. 152.

где $dS = dy\,dz$ — площадь прямоугольника $ABCD$. Аналогично, стороны BC и AD вносят в циркуляцию слагаемое $+\frac{\partial B_z}{\partial y}\,dS$. Полная циркуляция будет

$$\oint B_s\,ds = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)dS.$$

По теореме о циркуляции та же величина равна $4\pi j_x\,dS/c$, так как $j_x\,dS$ есть полный ток, пронизывающий контур $ABCD$. Приравнивая оба выражения, придем к уравнению

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}\,j_x.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\,j_y,$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c}\,j_z.$$

Умножив эти уравнения на координатные орты $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ и сложив, получим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{j}. \tag{56.1}$$

Это — одна из важнейших формул в учении об электричестве. Символом $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ обозначен вектор

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \equiv \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z. \tag{56.2}$$

Дифференциальное выражение (56.2) играет важную роль во многих разделах математики и физики. Оно называется **ротором** вектора $\boldsymbol{B}$. Формально $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ можно рассматривать как **векторное** произведение дифференциального оператора

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

на вектор $\boldsymbol{B}$, т. е.

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \equiv [\nabla \boldsymbol{B}] \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{56.3}$$

2. Векторные поля, ротор которых не равен нулю, называются *вихревыми полями*. Формула (56.1) показывает, что магнитное поле $\boldsymbol{B}$ является *вихревым* во всех областях пространства, где текут электрические токи, и *безвихревым*, где токов нет. В последнем случае вектор $\boldsymbol{B}$ может быть представлен в виде градиента магнитного потенциала. Такое представление, однако, невозможно в тех областях, где текут токи. Там понятие магнитного потенциала лишено смысла. Действительно, из соотношений (18.4) и (56.2) нетрудно получить тождество

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0, \tag{56.4}$$

какова бы ни была функция φ. Если бы магнитное поле представлялось выражением $\boldsymbol{B} = -\operatorname{grad} \varphi_m$, то из этого тождества мы получили бы $\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = 0$. Следовательно, плотность тока $\boldsymbol{j}$ должна была бы обращаться в нуль, как это следует из сравнения соотношения $\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = 0$ с формулой (56.1). Это и доказывает наше утверждение.

Основные уравнения магнитного поля постоянных токов в вакууме могут быть записаны в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{56.5}$$

Сравним их с основными уравнениями электростатического поля в вакууме:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{56.6}$$

Из этих уравнений видно, что электростатическое поле всегда потенциально, его источниками являются неподвижные электрические заряды. Магнитное поле, напротив, не потенциально, а соленоидально, его источниками служат электрические токи.

3. Приведем в заключение математическую *теорему Стокса* (1819—1903), широко используемую в математических преобразованиях теории поля. Эта теорема гласит:

$$\oint (\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{s}) = \int (\operatorname{rot} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{S}), \tag{56.7}$$

где $\boldsymbol{A}$ — произвольный вектор. Интеграл слева берется по произвольному замкнутому контуру s, справа — по произвольной поверхности, натянутой на этот контур. Имея в виду прием, указанный на рис. 144, достаточно доказать формулу

(56.7) для бесконечно малого контура. Бесконечно малый контур можно рассматривать как плоский. Пусть n — единичная нормаль к плоскости такого контура, а N — единичная нормаль к самому контуру, лежащая в его плоскости (рис. 153). Введем вектор $C = [An]$, получающийся из A путем поворота вокруг нормали n. Ясно, что вектор C лежит в плоскости контура. Применим к нему математическую формулу Гаусса — Остроградского

$$\oint (CN)\,ds = \int \operatorname{div} C\,dS.$$

Легко показать, что $\operatorname{div} C = \operatorname{div}[An] = n \operatorname{rot} A$. Кроме того,

$$(CN) = [An]\,N = A\,[nN] = (A\tau),$$

где $\tau = [nN]$ — единичный вектор касательной к контуру s. В результате получим

$$\oint (A\tau)\,ds = \int (n \operatorname{rot} A)\,dS,$$

что и доказывает теорему. Из доказанного следует:

$$\operatorname{rot}_n A = \lim_{S \to 0} \frac{\oint (A\,ds)}{S}. \qquad (56.8)$$

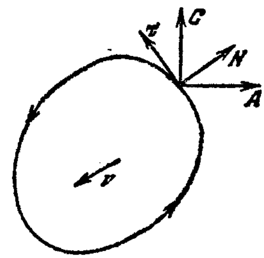

Рис. 153.

Этим дается *инвариантное определение проекции ротора* A на направление произвольного вектора n, а следовательно, и *инвариантное определение самого ротора.*

§ 57. Эквивалентность магнитных полей тока и магнитного листка

1. До открытия магнитных действий тока причину магнитных явлений видели в существовании особых субстанций — *северного* и *южного магнетизмов*, взаимодействующих между собой по тому же закону Кулона, которому подчиняются электрические заряды. В одном отношении, однако, магнитные заряды существенно отличались от электрических: в магните невозможно отделить северный полюс от южного. Это вызывало сомнения в реальном существовании магнитных зарядов. Ампер выдвинул гипотезу, подтвержденную всеми последующими исследованиями, согласно которой *магнитных зарядов не существует, а единственными источниками магнитного поля являются токи.* К обычным макроскопическим токам Ампер добавил так называемые *молекулярные токи*, которые, по его представлениям, циркулируют внутри атомов вещества. Как было установлено уже в 20 столетии, молекулярные токи Ампера — это просто движущиеся электроны и ядра, из которых построены атомы вещества. Почему же формальное учение о магнетизме, основанное на представлении о магнитных зарядах, приводило к правильным результатам, если в действительности таких зарядов не существует? На этот вопрос дает ответ *теорема Ампера* об эквивалентности магнитных полей тока и магнитного листка.

2. Рассмотрим сначала элементарный виток тока. Магнитное поле вне витка может быть выражено через магнитный потенциал (55.2). Для элементарного витка $\Omega = -(Sr)/r^3$, где S — вектор