

(56.7) для бесконечно малого контура. Бесконечно малый контур можно рассматривать как плоский. Пусть  $n$  — единичная нормаль к плоскости такого контура, а  $N$  — единичная нормаль к самому контуру, лежащая в его плоскости (рис. 153). Введем вектор  $C = [An]$ , получающийся из  $A$  путем поворота вокруг нормали  $n$ . Ясно, что вектор  $C$  лежит в плоскости контура. Применим к нему математическую формулу Гаусса — Остроградского

$$\oint (CN) ds = \int \operatorname{div} C dS.$$

Легко показать, что  $\operatorname{div} C = \operatorname{div} [An] = n \operatorname{rot} A$ . Кроме того,

$$(CN) = [An] N = A [nN] = (A\tau),$$

где  $\tau = [nN]$  — единичный вектор касательной к контуру  $s$ . В результате получим

$$\oint (A\tau) ds = \int (n \operatorname{rot} A) dS,$$

что и доказывает теорему. Из доказанного следует:

$$\operatorname{rot}_n A = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint (A ds)}{S}. \quad (56.8)$$

Этим дается инвариантное определение проекции ротора  $A$  на направление произвольного вектора  $n$ , а следовательно, и инвариантное определение самого ротора.

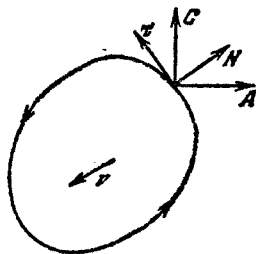


Рис. 153.

## § 57. Эквивалентность магнитных полей тока и магнитного листка

1. До открытия магнитных действий тока причину магнитных явлений видели в существовании особых субстанций — северного и южного магнетизмов, взаимодействующих между собой по тому же закону Кулона, которому подчиняются электрические заряды. В одном отношении, однако, магнитные заряды существенно отличались от электрических: в магните невозможно отделить северный полюс от южного. Это вызывало сомнения в реальном существовании магнитных зарядов. Ампер выдвинул гипотезу, подтвержденную всеми последующими исследованиями, согласно которой магнитных зарядов не существует, а единственными источниками магнитного поля являются токи. К обычным макроскопическим токам Ампер добавил так называемые молекулярные токи, которые, по его представлениям, циркулируют внутри атомов вещества. Как было установлено уже в 20 столетии, молекулярные токи Ампера — это просто движущиеся электроны и ядра, из которых построены атомы вещества. Почему же формальное учение о магнетизме, основанное на представлении о магнитных зарядах, приводило к правильным результатам, если в действительности таких зарядов не существует? На этот вопрос дает ответ теорема Ампера об эквивалентности магнитных полей тока и магнитного листка.

2. Рассмотрим сначала элементарный виток тока. Магнитное поле вне витка может быть выражено через магнитный потенциал (55.2). Для элементарного витка  $\Omega = -(Sr)/r^3$ , где  $S$  — вектор

элементарной площадки, натянутой на контур тока. Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  проведен от витка к точке наблюдения, в связи с чем в выражении для  $\Omega$  и поставлен знак минус. Используя это выражение, получим

$$\varphi_m = \frac{(\mathfrak{M}\mathbf{r})}{r^3}, \quad (57.1)$$

где  $\mathfrak{M}$  — магнитный момент тока, определяемый выражением (52.2). Формула (57.1) совпадает с соответствующей формулой (19.6) для электрического потенциала точечного диполя. Вместо электрического дипольного момента  $\mathbf{p}$  в нее входит магнитный момент тока  $\mathfrak{M}$ . Таким образом, при нахождении напряженности магнитного поля элементарный виток с током можно заменить элементарным магнитом, состоящим из двух магнитных зарядов противоположных знаков, слегка сдвинутых один относительно другого. Отсюда следует, что магнитное поле элементарного витка (как и поле точечного диполя) меняется обратно пропорционально кубу расстояния от него. Этот результат был использован при выводе формулы (55.8) для напряженности магнитного поля соленоида.

Обобщение полученного результата на конечные витки с током производится обычным приемом разложения конечного витка на элементарные (рис. 144). Заменяв каждый элементарный виток эквивалентным ему диполем, получим «магнитный листок», т. е. поверхность  $S$ , натянутую на контур тока, одна сторона которой равномерно покрыта северным, а другая — южным магнетизмами. На единицу площади такой поверхности приходится магнитный момент

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathcal{I}}{c} \mathbf{n}, \quad (57.2)$$

называемый *мощностью магнитного листка*. (Единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S$  должен находиться в правовинтовом соотношении с направлением тока.) Магнитное поле такого магнитного листка во внешнем пространстве совпадает с магнитным полем тока  $\mathcal{I}$ , текущего по контуру листка. В этом и состоит теорема Ампера. В качестве  $S$  можно выбрать любую поверхность, опирающуюся на рассматриваемый контур тока.

3. Эквивалентность магнитных полей тока и магнитного листка имеет место *только во внешнем пространстве*. Внутри листка магнитное поле существенно отличается от магнитного поля тока в соответствующих точках пространства. Силовые линии магнитного поля тока тянутся непрерывно, обвиваясь вокруг тока, а магнитный потенциал нигде не претерпевает скачков. Напротив, при прохождении через магнитный листок потенциал меняется скачкообразно на  $4\pi\mathfrak{m} = 4\pi\mathcal{I}/c$ . Это связано с тем, что внутри листка магнитное поле очень сильное и направлено противоположно наружному полю. Магнитный листок подобен конденсатору с близко

расположенными обкладками (рис. 154). На ранней стадии учения о магнетизме изучались магнитные поля вне магнитов. По теореме Ампера они могли быть точно моделированы полями магнитных зарядов, надлежащим образом распределенных внутри магнита. Этим и объясняется, почему расчеты, основанные на представлении о магнитных зарядах, приводили к верным результатам. Однако мы пришли бы к грубым ошибкам, если бы пользовались этими представлениями при расчетах магнитных полей внутри магнитов или в тех областях пространства, по которым текут электрические токи.

4. Аналогия между током и магнитным листком относится не только к возбуждаемым ими магнитным полям. Она распространяется также на силы, действующие на токи и листки в магнитных полях. Действительно, ранее уже было показано, что на элементарный виток с током в магнитном поле действует вращающий момент  $M = [\mathfrak{M}B]$ . Остается поэтому доказать, что в неоднородном поле на элементарный виток действует сила

$$F = (\mathfrak{M}\nabla) B. \quad (57.3)$$

Для доказательства достаточно ограничиться случаем элементарного витка, имеющего форму бесконечно малого прямоугольника, так как введением добавочных перемычек произвольный контур можно разбить на более мелкие прямоугольные подконтуров (см. рис. 144). Непрямоугольными могут оказаться только подконтуров, примыкающие к границе. Но число перемычек можно взять настолько большим, чтобы площадь, охватываемая такими подконтуров, стала пренебрежимо малой по сравнению с площадью всего контура.

Направим оси  $X$  и  $Z$  параллельно сторонам нашего прямоугольного контура (см. рис. 152). Стороны  $AB$  и  $BC$  изобразим векторами  $a$  и  $b$ . Силы, действующие на стороны  $AB$  и  $CD$ , равны соответственно  $\frac{1}{c} \mathcal{J} [aB_1]$  и  $-\frac{1}{c} \mathcal{J} [aB_2]$ , где  $B_1$  и  $B_2$  — средние значения соответствующих напряженностей магнитных полей. Так как  $B_1 - B_2 = -b \partial B / \partial z$ , то равнодействующая этих сил равна

$$F_1 = -\frac{\mathcal{J}}{c} \left[ a \frac{\partial B}{\partial z} \right] b = -\frac{\mathcal{J}}{c} ab \left[ e_y \frac{\partial B}{\partial z} \right] = -\frac{\mathcal{J}}{c} S \left[ e_y \frac{\partial B}{\partial z} \right],$$

где  $S = ab$  — площадь контура. Следовательно,  $F_1 = -\mathfrak{M} [e_y \partial B / \partial z]$ . Аналогично, равнодействующая сил, действующих на противоположные стороны  $DA$  и  $BC$ , равна  $F_2 = \mathfrak{M} [e_z \partial B / \partial y]$ . Полная сила

$$F = F_1 + F_2 = \mathfrak{M} \left\{ \left[ e_z \frac{\partial B}{\partial y} \right] - \left[ e_y \frac{\partial B}{\partial z} \right] \right\}.$$

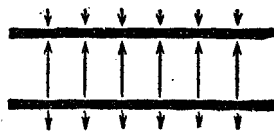


Рис. 154.

Подставим сюда  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z$ . Тогда получим

$$\mathbf{F} = \mathfrak{M} \left( \frac{\partial B_x}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial B_x}{\partial z} \mathbf{e}_z - \frac{\partial B_y}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{e}_x \right).$$

В силу уравнения (53.2)  $\partial B_y / \partial y + \partial B_z / \partial z = -\partial B_x / \partial x$ . Предположим, кроме того, что виток находится в пространстве, где нет токов. Тогда по теореме о циркуляции (56.1)  $\partial B_x / \partial y = \partial B_y / \partial x$ ,  $\partial B_x / \partial z = \partial B_z / \partial x$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathfrak{M} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial B_y}{\partial x} \mathbf{e}_y + \frac{\partial B_z}{\partial x} \mathbf{e}_z \right) = \\ &= \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial x} (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) = \mathfrak{M} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Так как магнитный момент  $\mathfrak{M}$  направлен по оси  $X$ , то это выражение совпадает с выражением (57.3).

### ЗАДАЧИ

1. Определить движение заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле  $\mathbf{B}$ .

**Решение.** Действующая сила  $\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]$  перпендикулярна к скорости частицы  $\mathbf{v}$ . Она работы не производит, а потому величина скорости  $\mathbf{v}$  остается неизменной. Скорость  $\mathbf{v}$  может меняться только по направлению. Допустим сначала, что скорость  $\mathbf{v}$  перпендикулярна к магнитному полю  $\mathbf{B}$ . Тогда частица будет двигаться по окружности. Угловая скорость вращения  $\omega$  определится из уравнения

$$-m\omega^2 r = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Подставляя в него  $\mathbf{v} = [\omega \mathbf{r}]$ , получим

$$-m\omega^2 r = \frac{e}{c} [[\omega \mathbf{r}]\mathbf{B}] = \frac{e}{c} (\omega \mathbf{B}) r,$$

откуда

$$\omega = -\frac{e}{mc} \mathbf{B}. \quad (57.4)$$

Величина  $|\omega|$  называется *циклотронной частотой*, а радиус окружности

$$r = \frac{v}{|\omega|} = \frac{mcv}{|e|B} \quad (57.5)$$

— *ларморовским радиусом*.

Если скорость  $\mathbf{v}$  не перпендикулярна к  $\mathbf{B}$ , то для нерелятивистских движений ее можно представить в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$ , где  $\mathbf{v}_{\parallel}$  — скорость частицы вдоль поля  $\mathbf{B}$ , а  $\mathbf{v}_{\perp}$  — перпендикулярно к нему. Частица будет вращаться по окружности с прежней частотой (57.4). Радиус окружности будет

$$r_{\perp} = \frac{mcv_{\perp}}{|e|B}. \quad (57.6)$$

На это вращение наложится равномерное движение вдоль поля  $\mathbf{B}$  со скоростью  $\mathbf{v}_{\parallel}$ . Таким образом, траекторией частицы будет спираль с осью, направленной вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}$ .

2. Заряженная космическая частица (например, протон) захвачена земным магнитным полем и вращается вокруг Земли в плоскости экватора по окружности радиуса  $R = 6700$  км. Напряженность земного магнитного поля на траектории частицы  $B = 0,4$  Гс. Найти энергию такой частицы.

О т в е т.  $\mathcal{E} = mc^2 = eBR = 80$  ГэВ.

У к а з а н и е. Скорость космической частицы настолько мало отличается от скорости света, что ее энергия покоя пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией. Кинетическую энергию можно вычислять по формуле  $\mathcal{E} = mc^2$ , где  $m$  — релятивистская масса частицы.

3. Серпуховской ускоритель протонов ускоряет эти частицы до энергии  $\mathcal{E} = 76$  ГэВ  $= 7,6 \cdot 10^{10}$  эВ. Если отвлечься от наличия ускоряющих промежутков, то можно считать, что ускоренные протоны движутся по окружности радиуса  $R = 236$  м и удерживаются на ней магнитным полем, перпендикулярным к плоскости орбиты. Найти необходимое для этого магнитное поле.

О т в е т.  $B = \mathcal{E}/(Re) = V/R = 1,07 \cdot 10^4$  Гс ( $V$  — ускоряющее напряжение, соответствующее энергии  $\mathcal{E}$ , равное  $7,6 \cdot 10^{10}$  В  $= 2,53 \cdot 10^8$  СГСЭ-ед).

У к а з а н и е. Протоны считать ультрарелятивистскими. Их скорость настолько близка к скорости света, что энергия покоя протона пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией. При таком условии кинетическую энергию можно вычислить по формуле  $\mathcal{E} = mc^2$ , где  $m$  — релятивистская масса протона.

4. Легкий шарик массы  $m = 0,5$  г и радиуса  $r = 1$  см подвешен на длинной нити и вращается по горизонтальной окружности, радиус которой очень мал по сравнению с длиной нити (конический маятник). Найти изменение угловой скорости вращения шарика  $\Delta\omega$  после того, как шарик был заряжен до потенциала  $V = 3000$  В и помещен в вертикальное магнитное поле  $B = 3000$  Гс. В каком случае угловая скорость увеличится и в каком уменьшится?

П р и м е ч а н и е. Окончательную формулу для изменения угловой скорости упростить, используя соотношение  $\omega_0 \equiv qB/(mc) \ll \sqrt{g/l}$ , где  $q$  — заряд шарика,  $l$  — длина нити,  $g$  — ускорение силы тяжести.

О т в е т.  $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0 = \pm qB/(2mc) = \pm rVB/(2mc) = 10^{-6}$  с $^{-1}$ . Угловая скорость увеличится, когда векторы  $B$  и  $\omega_0$  направлены противоположно, и уменьшится, когда их направления совпадают.

5. В центре рамки, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной  $a = 36$  см, помещена маленькая магнитная стрелка. Плоскость рамки совпадает с плоскостью магнитного меридиана Земли. Какой ток  $\mathcal{I}$  надо пропустить по рамке, чтобы стрелка повернулась на угол  $45^\circ$ ? Горизонтальная составляющая земного магнитного поля  $B_0 = 0,4$  Гс.

О т в е т.  $\mathcal{I} = 1/18caB_0 = 2,4 \cdot 10^{10}$  СГСЭ-ед.  $= 8$  А.

6. Масс-селектор, т. е. прибор, предназначенный для разделения атомных частиц разных масс, состоит из цилиндрического конденсатора с внутренним радиусом  $R_1 = 2,4$  см и внешним  $R_2 = 3$  см (рис. 155). Ионные лучи попадают в селектор через узкую щель  $S$ , расположенную посередине между обкладками. Параллельно оси конденсатора (т. е. перпендикулярно к плоскости чертежа) приложено однородное магнитное поле  $B = 2000$  Гс.

Какую по величине и знаку разность потенциалов надо приложить к пластинам конденсатора, чтобы однократно заряженный положительный ион  $\text{Li}^7$  прошел по средней линии конденсатора, т. е. по окружности радиуса  $R = 2,7$  см? Найти напряженность электрического поля на этой окружности. Энергия иона  $\mathcal{E} = 1000$  эВ. Масса атома водорода  $1,67 \cdot 10^{-24}$  г. На сколько надо изменить эту разность потенциалов, чтобы по той же линии через селектор могли пройти ионы  $\text{Li}^6$ ?

О т в е т. Для  $\text{Li}^7$   $V = ER \ln(R_2/R_1) \approx E(R_2 - R_1) \approx 245$  В,  $E = 408$  В/см. Для  $\text{Li}^6$   $V = 229$  В,  $E = 381$  В/см.

7. В прямоугольную кювету (рис. 156), передняя и задняя стенки которой металлические, а боковые диэлектрические, налит электролит с электропроводностью  $\lambda = 0,2$  Ом $^{-1}$ ·см $^{-1}$ . К металлическим стенкам приложено напряжение

$V = 30$  В, и вся кювета помещена в однородное магнитное поле  $B = 100$  Гс, направленное вертикально. Размеры кюветы:  $L = 20$  см,  $a = 2$  см, плотность электролита  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Определить разность уровней жидкости  $\Delta h$  около правой и левой стенок кюветы.

Ответ.  $\Delta h = \frac{\lambda VBL}{ac\rho g} = 0,6$  см.

8. Для осуществления теплосъема с ядерных реакторов в качестве теплоносителя применяют расплавленные металлы. Перекачка металлов по трубам производится с помощью электромагнитных насосов: участок трубы с расплавленным металлом помещается в поперечное магнитное поле, т. е. поле, перпендикулярное к оси трубы; через тот же участок трубы перпендикулярно к ее оси и к магнитному полю пропускается поперечный электрический ток. При этом возникает сила, приводящая жидкость в движение. Оценить ток, необходимый для перекачки ртути по трубе диаметром  $D = 20$  мм и длиной  $L = 10$  м со скоростью  $V = 1$  л/с. Вязкость ртути  $\eta = 1,5 \cdot 10^{-2}$  дин·с/см<sup>2</sup>, магнитное поле  $B = 1000$  Гс.

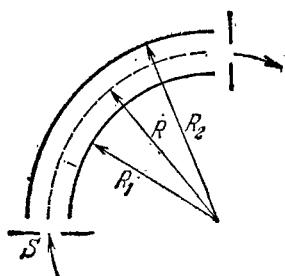


Рис. 155.

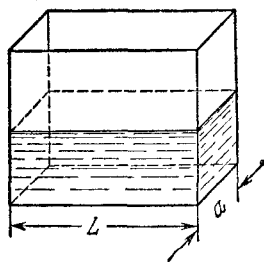


Рис. 156.

Решение. Сила, действующая на столб ртути в трубе,  $F \approx \mathcal{I}DB/c$ . Такая сила эквивалентна разности давлений на концах трубы  $P_2 - P_1 = 4F/(\pi D^2)$ . Подставляя эту разность в формулу Пуазейля (см. т. I, § 97), получим

$$\mathcal{I} \approx 32\eta cL/(BD^3) = 1,8 \cdot 10^{12} \text{ СГСЭ-ед.} = 600 \text{ А.}$$

9. Найти отношение силы кулоновского расталкивания к силе амперова притяжения двух параллельных пучков, состоящих из электронов, прошедших ускоряющий потенциал  $V = 10$  кВ.

Ответ.  $F_{\text{кул}}/F_{\text{амп}} = mc^2(2eV) \approx 25$ .

10. Две щели  $S_1$  и  $S_2$  шириной  $d = 0,1$  см каждая (рис. 157), установленные в вакуированном сосуде, выделяют плоский пучок электронов с энергией  $\mathcal{E} = 400$  эВ. На каком расстоянии  $x$  от щели  $S_2$  ширина электронного пучка удвоится из-за кулоновского расталкивания электронов, если электронный ток, проходящий на единицу длины щели (за щелью  $S_2$ ), равен  $i = 10^{-4}$  А/см? При расчетах щели считать бесконечно длинными.

Решение. Электрическое поле  $E$  можно найти, пренебрегая расширением пучка. На границе и вне пучка  $E = 2\pi\sigma$ , где  $\sigma = i/e$  — заряд, проходящий на единицу площади пучка. Частицы, находящиеся на границе пучка, в поперечном направлении будут двигаться равноускоренно и за время  $t$  сместятся на

$$\Delta y = eEt^2/(2m) = eEx^2/(2mv^2).$$

Искомое расстояние  $x$  определится из требования  $\Delta y = d/2$ , которое дает

$$x = \sqrt{m d v^3 / (2\pi i e)}, \quad v = \sqrt{2\mathcal{E}/m}.$$

Отсюда  $x = 13$  см.

11. Бесконечно длинный цилиндрический провод (рис. 158) состоит из двух коаксиальных цилиндров: центрального сплошного цилиндра радиуса  $r_1$ , сделанного из материала с удельным сопротивлением  $\rho_1$ , и окружающего его полого цилиндра с внешним радиусом  $r_2$ , изготовленного из материала с удельным сопротивлением  $\rho_2$ . Внешняя поверхность сплошного и внутренняя поверхность полого цилиндров находятся в электрическом контакте. По проводу параллельно его оси течет постоянный ток  $\mathcal{I}$ . Найти выражения для напряженности магнитного поля внутри и вне проводов.

Отв. ст.

$$B = \begin{cases} 2\mathcal{I}\rho_2 r / (cA) & (r \leq r_1), \\ 2\mathcal{I} [\rho_1 (r^2 - r_1^2) + \rho_2 r_1^2] / (cAr) & (r_1 \leq r \leq r_2), \\ 2\mathcal{I} / (cr), & (r \geq r_2), \end{cases}$$

$$A = \rho_1 (r_2^2 - r_1^2) + \rho_2 r_1^2.$$

12. Вдоль тонкостенной цилиндрической трубки радиуса  $a = 25$  мм течет постоянный ток  $\mathcal{I} = 20$  А. В стенке трубки имеется тонкая щель ширины  $d = 1$  мм, параллельная оси трубки. Определить магнитное поле внутри трубки на больших расстояниях  $r$  от середины щели, ( $r \gg d$ ).

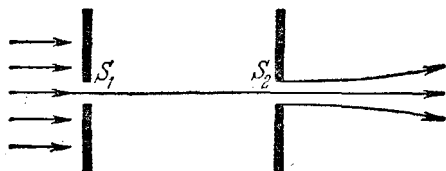


Рис. 157.

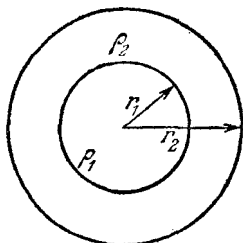


Рис. 158.

Отв. ст. Магнитные силовые линии в трубке имеют форму коаксиальных дуг окружностей, центры которых расположены на оси щели.  $B = \mathcal{I} d / (\pi c a r)$ . На оси трубки (при  $r = a$ )  $B = \mathcal{I} d / (\pi c a^2) \approx 0,1$  Гс.

13. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, сделанным из немагнитного материала и изолированным друг от друга, текут в противоположных направлениях токи с одной и той же плотностью  $j = 1000$  А/см<sup>2</sup>. Проводники ограничены участками цилиндрических поверхностей и отделены один от другого полостью  $\Pi$ . (На рис. 159 поперечные сечения проводников заштрихованы.) Найти величину и направление магнитного поля в полости  $\Pi$ . Ток в левом проводнике направлен к читателю, а в правом — от читателя. Расстояние между осями цилиндров  $AB = D = 5$  см.

Отв. ст.  $B = 2\pi j D = 3140$  Гс. Поле  $B$  перпендикулярно к линии  $AB$  и направлено вверх.

14. Определить напряженность магнитного поля внутри бесконечной цилиндрической полости, сделанной в бесконечном цилиндрическом проводе, вдоль которого течет постоянный ток плотности  $j$ , равномерно распределенный по сечению провода. Расстояние между осями провода и полости равно  $d$ .

Отв. ст.  $B = \frac{2\pi}{c} j [sd]$ , где  $s$  — единичный вектор, направленный вдоль тока, а вектор  $d$  проведен от оси провода к оси цилиндрической полости.

15. В высокий цилиндрический сосуд радиуса  $R$  налит электролит. Внутри сосуда параллельно его оси расположен цилиндрический металлический стержень радиуса  $r$ , поверхность которого покрыта изолирующей краской. Расстояние между осями стержня и сосуда равно  $a$ . В электролите параллельно оси течет ток силы  $\mathcal{I}$ , возвращающийся обратно по стержню. Считая плотность тока в элек-

тролите постоянной, найти силу, с которой магнитное поле, созданное этими токами, действует на единицу длины стержня. Куда эта сила направлена?

О т в е т.  $F = \frac{2\mathcal{I}^2}{c^2(R^2 - r^2)}$  а. Сила направлена от оси цилиндра к оси стержня.

16. Заряженный шарик радиуса  $a$  равномерно вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью  $\omega$ . Общий заряд шарика равен  $q$ . Найти магнитное поле шарика на расстояниях  $r$ , больших по сравнению с  $a$ , если заряд  $q$  равномерно распределен 1) по поверхности шарика, 2) по объему шарика.

О т в е т. 1)  $\mathbf{B} = \frac{qa^2}{3c} \left[ \frac{3(\omega\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\omega}{r^3} \right]$ ; 2)  $\mathbf{B} = \frac{qa^2}{5c} \left[ \frac{3(\omega\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\omega}{r^3} \right]$ .

(Вектор  $\mathbf{r}$  проведен из центра шарика.)

Р е ш е н и е. Рассмотрим случай 1). Возьмем на поверхности шарика бесконечно узкий поясok, заключенный между углами  $\vartheta$  и  $\vartheta + d\vartheta$  (рис. 160). Вращаясь с угловой скоростью  $\omega$ , такой поясok эквивалентен круговому току  $d\mathcal{I} = \omega q \sin \vartheta d\vartheta / (4\pi)$  с магнитным моментом  $d\mathcal{M} = S d\mathcal{I} / c = \pi a^2 q \omega \sin^3 \vartheta d\vartheta / (4\pi c)$ . Интегрируя по  $\vartheta$ , находим магнитный момент всего шара  $\mathcal{M} = qa^2 \omega / (3c)$ . Отсюда и получается результат, приведенный в ответе. Случай 2) рассматривается аналогично.

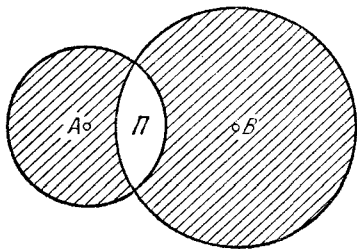


Рис. 159.

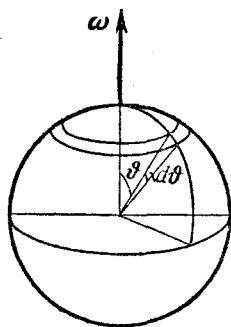


Рис. 160.

17. Для моделирования траектории атомной частицы с зарядом  $e$  и импульсом  $p$ , движущейся в постоянном магнитном поле, часто пользуются тем обстоятельством, что очень легкий (невесомый) гибкий проводящий шнур с током  $\mathcal{I}$ , находящийся под постоянным механическим натяжением  $T$ , занимает в том же магнитном поле положение, совпадающее с траекторией частицы. (Предполагается, что вне магнитного поля участки шнура прямолинейны и расположены вдоль соответствующих прямолинейных же участков траектории.) Обосновать этот метод. Найти связь между  $\mathcal{I}$ ,  $e$ ,  $p$ ,  $T$ . Величина магнитного поля  $B$  может меняться в пространстве, но его направление должно оставаться неизменным. Шнур и траектория частицы перпендикулярны к магнитному полю.

Р е ш е н и е. Радиус кривизны траектории частицы в магнитном поле  $\rho = cp / (eB)$ . На единицу длины натянутого шнура действует нормально упругая сила  $T / \rho_1$ , которая уравнивается амперовой силой  $\mathcal{I} B / c$ . Это дает для радиуса кривизны шнура  $\rho_1 = Tc / (\mathcal{I} B)$ . При выполнении условия  $\rho_1 = \rho$ , т. е.  $\mathcal{I} p = Te$ , форма траектории будет совпадать с формой шнура.

## § 58. Магнитное поле в веществе

1. В веществе магнитное поле возбуждается не только электрическими токами, текущими по проводам, но и движениями заряженных частиц внутри самих атомов и молекул. Согласно