

заключение верно, как в этом можно убедиться с помощью точных релятивистских формул преобразования полей. Точно так же не всегда возможно перейти к такой системе отсчета, в которой электромагнитное поле становится чисто магнитным. Отсюда следует, что в общем случае индукционный ток вызывается как электрическим, так и магнитным полями. Не всегда возможно, перейдя к другой системе отсчета, рассматривать его как проявление только одного из этих полей.

### § 67. Флюксметр и пояс Роговского

На явлении электромагнитной индукции основан простой и удобный метод измерения напряженности магнитных полей. Соединим с баллистическим гальванометром концы небольшого витка проволоки. Расположим плоскость витка перпендикулярно к магнитному полю. Пусть его пронизывает магнитный поток  $\Phi$ . Если быстро убрать виток из поля или повернуть его вокруг диаметра на  $90^\circ$ , то магнитный поток обратится в нуль. Того же можно достигнуть, выключив ток, возбуждающий магнитное поле. При изменении магнитного потока через виток течет кратковременный ток

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{Rc} \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $R$  — сумма сопротивлений витка, баллистического гальванометра и подводющих проводов. За все время изменения магнитного потока от  $\Phi$  до 0 через гальванометр пройдет количество электричества

$$q = -\frac{1}{Rc} \int_{\Phi}^0 \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{\Phi}{Rc}. \quad (67.1)$$

Отклонение баллистического гальванометра пропорционально заряду  $q$ , а потому он позволяет измерить этот заряд. После этого по формуле (67.1) можно вычислить магнитный поток  $\Phi$ , а затем и индукцию  $B$ . Для увеличения чувствительности вместо одного витка лучше взять маленькую плоскую катушечку, состоящую из многих витков. Если  $n$  — общее число витков, а  $S$  — площадь одного витка, то  $\Phi = nSB$ . Такая катушечка, служащая для измерения магнитного потока  $\Phi$ , а с ним и индукции  $B$ , называется *флюксметром*. Прибор можно проградуировать, чтобы он прямо указывал значение потока  $\Phi$  или величину  $B$ .

Явление электромагнитной индукции можно также использовать для измерения *магнитного напряжения*, т. е. линейного интеграла  $\int B ds$ . Вообще говоря, такой интеграл зависит не только от положения начальной и конечной точек 1 и 2, но и от кривой

12, соединяющей эти точки. Однако при определенных условиях можно выделить такую совокупность кривых, соединяющих точки 1 и 2, что вдоль всех этих кривых интеграл  $\int \mathbf{B} ds$  будет иметь одно и то же значение. Так будет всегда, когда от одной кривой можно перейти к другой непрерывной деформацией, нигде не пересекая электрических токов. Возьмем проволочную спираль, навитую на гибкий ремень, концы которой соединены с баллистическим гальванометром (рис. 174, а). Расположим ось спирали по линии, вдоль которой требуется измерить магнитное напряжение между точками 1 и 2. Магнитный поток  $\Phi$  через спираль может

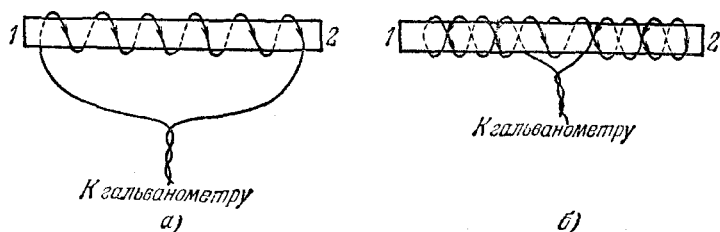


Рис. 174.

быть измерен по отбросу баллистического гальванометра совершенно так же, как это делалось в случае флюксметра. Поток может быть представлен в виде

$$\Phi = \int Sn \mathbf{B} ds.$$

Здесь  $S$  — площадь одного витка, а  $n$  — число витков, приходящееся на единицу длины спирали. Если величины  $n$  и  $S$  не меняются вдоль спирали, то  $\Phi = Sn \int (\mathbf{B} ds)$ . Отсюда

$$\int (\mathbf{B} ds) = \frac{\Phi}{Sn} = \frac{cR}{nS} q. \quad (67.2)$$

В приведенных рассуждениях допущены некоторые неточности. Магнитное поле спирали складывается из магнитных полей круговых токов, которые мы учли. Но есть составляющая тока, параллельная оси спирали. Ее магнитное поле не учтено. Кроме того, есть магнитное поле подводющих проводов. Чтобы влияние этих полей исключить, спираль навивают на ремень в два слоя, идущие навстречу друг другу (рис. 174, б). Концы проводов выводят в одном месте, например в середине ремня. Подводящие провода скручивают. В таком виде прибор называется поясом Роговского. Для измерения магнитного напряжения пояс Роговского располагают

между нужными точками вдоль заданной кривой. Затем выключают ток, создающий магнитное поле. Баллистический гальванометр даст отброс, пропорциональный искомому магнитному напряжению.

### ЗАДАЧИ

1. Механическая аналогия явления электромагнитной индукции. Труба, свернутая в кольцо, заполнена жидкостью и находится в поле тяжести Земли. При повороте кольца вокруг его диаметра жидкость приходит в движение вдоль оси трубы. Это движение аналогично индукционному току, возникающему при движении проводника в магнитном поле. Роль силы Лорентца играет *сила инерции Кориолиса*, вызванная вращением Земли вокруг своей оси. Опыт может служить для доказательства вращения Земли и измерения угловой скорости этого вращения. На основе аналогии описанного явления с электромагнитной индукцией дать количественную теорию его, предполагая, что жидкость несжимаема и не обладает вязкостью, а площадь поперечного сечения трубы всюду одинакова.

Решение. Будем рассматривать движение жидкости относительно системы отчета, связанной с вращающейся Землей. Это относительное движение происходит под действием гравитационных сил, градиентов давления жидкости, центробежной силы инерции и силы инерции Кориолиса. Все эти силы, за исключением силы Кориолиса, потенциальны. Поэтому относительное движение жидкости можно представить в виде

$$\mathbf{a} = 2[\mathbf{v}\Omega] + \mathbf{a}',$$

где  $\Omega$  — угловая скорость осевого вращения Земли,  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{отн}$  — скорость жидкости относительно Земли,  $\mathbf{a}'$  — ускорение, вызванное потенциальными силами. Потенциальный вектор  $\mathbf{a}'$  можно исключить, взяв циркуляцию вектора  $\mathbf{a}$  по замкнутому контуру. В качестве такового выберем геометрическую ось кольцевой трубы. Тогда

$$\oint \mathbf{a} ds = \oint \mathbf{f}_K ds,$$

где  $\mathbf{f}_K = 2[\mathbf{v}\Omega]$  — кориолисова сила, действующая на единицу массы жидкости. Так как жидкость несжимаема, а площадь поперечного сечения трубы всюду одна и та же, то осевая составляющая ускорения  $a_s$  будет также всюду одинакова. Вынося ее из-под знака интеграла, получим  $a_s = \mathcal{E}/s$ , где  $s$  — длина трубы, а  $\mathcal{E}$  означает интеграл  $\oint \mathbf{f}_K ds$ . Эта формула аналогична закону Ома. Роль силы тока, сопротивления и электродвижущей силы играют величины  $a_s$ ,  $s$  и  $\mathcal{E}$ . Аналогом магнитного поля  $\mathbf{B}$  служит удвоенная угловая скорость вращения Земли  $2\Omega$ . Поэтому на основании закона электромагнитной индукции можно написать  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ , где  $\Phi$  — поток вектора  $2\Omega$ , пронизывающий контур  $s$ . Таким образом,

$$a_s \equiv \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{s} \frac{d\Phi}{dt},$$

откуда

$$V = -\frac{1}{s} \Delta\Phi. \quad (67.3)$$

Через  $V$  обозначена осевая составляющая скорости жидкости.

Допустим, что кольцо имеет форму круга радиуса  $R$  и в начальный момент расположено горизонтально. Пусть  $\mathcal{S}$  — вектор площади кольца в этом

положении. Повернем кольцо на  $180^\circ$  вокруг горизонтальной оси. Тогда

$$\Phi_{\text{нач}} = 2(\Omega S), \quad \Phi_{\text{конеч}} = -2(\Omega S),$$

$$\Delta\Phi = -4(\Omega S) = -4\Omega S \sin \theta.$$

Здесь  $\theta$  — географическая широта места, где производится опыт. Подставляя в формулу (67.3)  $S = \pi R^2$ ,  $s = 2\pi R$  и предполагая, что в начальный момент жидкость была неподвижна, получим

$$V = 2\Omega R \sin \theta.$$

Пусть в конечном положении кольцо находится в покое. Тогда жидкость будет двигаться в нем со скоростью  $V = 2\Omega R \sin \theta$ . На полюсе  $\theta = 90^\circ$ ,  $V = 2\Omega R$ .

Этот результат легко получить также, относя все движения к «неподвижной» системе отсчета. На экваторе  $V = 0$ .

2. На клеммах генератора поддерживается постоянное напряжение  $V = 120$  В. К клеммам присоединены последовательно соединенные реостат и электромотор, общее сопротивление которых  $r = 5$  Ом. В этих условиях через обмотку электромотора идет ток  $\mathcal{I} = 10$  А. Электромотор отключают, замыкают на сопротивление  $R = 100$  Ом (включая собственное сопротивление электромотора) и используют в качестве динамо-машины. Определить силу тока  $i$ , возбуждаемую в цепи электромотора, если его вращать с прежней угловой скоростью.

$$\text{Ответ. } i = V/R - \mathcal{I}r/R = 0,7 \text{ А.}$$

3. По двум вертикальным рейкам, соединенным внизу сопротивлением  $R = 2$  Ом и вверху батареей с электродвижущей силой  $\mathcal{E} = 1$  В, внутренним сопротивлением  $r = 2$  Ом, без трения скользит проводник  $AB$ , длина которого  $l = 10$  см, масса  $m = 10$  г (рис. 175). Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого  $B$  перпендикулярна площади рисунка, направлена к читателю и численно равна  $B = 10^4$  Гс. Найти установившуюся скорость проводника в поле тяжести, пренебрегая трением, а также сопротивлением реек и проводника.

$$\text{Ответ. } v = \frac{mgRc - \mathcal{E}Bl}{2B^2l^2} c = +500 \text{ см/с} = 5 \text{ м/с.}$$

Положительный знак означает, что скорость  $v$  направлена вниз.

4. По двум вертикальным рейкам, соединенным вверху и внизу сопротивлениями  $R = 0,01$  Ом, может скользить без трения проводник  $AB$ , длина которого  $l = 100$  см, масса  $m = 100$  г, сопротивление  $R = 0,01$  Ом (рис. 176). Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого  $B$  перпендикулярна к плоскости рисунка и равна  $B = 10\,000$  Гс. Найти максимальную скорость, которую получит проводник, падая в поле тяжести, пренебрегая трением и сопротивлением реек.

$$\text{Ответ. } v = \frac{3}{2} \frac{mgRc^2}{B^2l^2} = 1,5 \text{ см/с.}$$

5. Длинная незаряженная пластинка из немагнитного металла движется равномерно в однородном магнитном поле  $B = 1800$  Гс со скоростью  $v = 6,28 \cdot 10^7$  см/с. Векторы  $v$  и  $B$  взаимно перпендикулярны и параллельны плоскостям пластинки. Определить поверхностную плотность электрических зарядов на пластинке, возникших вследствие ее движения.

Ответ.  $\sigma = vB/(4\pi c) = 0,3$  СГСЭ-ед.  $= 10^{-10}$  Кл/см<sup>2</sup>. Отрицательное электричество сместится в направлении вектора  $[vB]$ , положительное — в противоположном направлении.

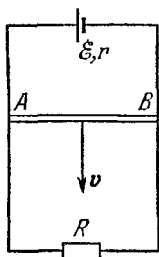


Рис. 175.

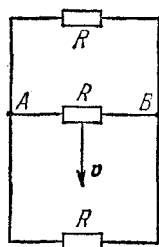


Рис. 176.

6. Длинный незаряженный цилиндр из немагнитного металла радиуса  $R = 12,56$  см равномерно вращается в однородном магнитном поле  $B = 300$  Гс, параллельном оси цилиндра, с угловой скоростью  $\omega = 60$  рад/с. Определить поверхностную плотность зарядов  $\sigma$ , возникающих вследствие вращения на боковой поверхности цилиндра. Указать знак поверхностных зарядов, если векторы  $\omega$  и  $B$  направлены в одну сторону. Магнитным полем возникающих зарядов и инерционными эффектами электронов пренебречь.

О т в е т.  $\sigma = \omega BR / (4\pi c) = 6 \cdot 10^{-2}$  СГСЭ-ед.  $= 2 \cdot 10^{-16}$  Кл/см<sup>2</sup>. Поверхностные заряды положительны.

7. Металлический шар радиуса  $a$  из немагнитного материала движется равномерно в постоянном и однородном магнитном поле  $B$  со скоростью  $v$ , направленной под углом к магнитному полю. Найти напряженность электрического поля внутри и вне шара в «неподвижной» системе отсчета, относительно которой шар движется со скоростью  $v$ . Найти также объемную и поверхностную плотность индуцированных зарядов. Магнитным полем движущихся индуцированных зарядов пренебречь.

Р е ш е н и е. Так как в стационарном состоянии ток внутри шара должен отсутствовать, то электрическое поле  $E^{(i)}$  должно компенсироваться силой  $\frac{1}{c} [vB]$ . Это дает для электрического поля внутри шара

$$E^{(i)} = -\frac{1}{c} [vB].$$

Объемных зарядов внутри шара не будет, так как  $\text{div } E^{(i)} = 0$ . Касательная составляющая поля  $E^{(i)}$ , а следовательно и внешнего поля  $E^{(e)}$ , на поверхности шара будет  $E_{\phi} = -E^{(i)} \sin \phi$ , где  $\phi$  — угол между направлением вектора  $E^{(i)}$  и радиусом  $r$ , проведенным из центра шара. Наружное поле  $E^{(e)}$  ищем как поле диполя  $p$ , помещенного в центре шара:

$$E^{(e)} = \frac{3(pr)}{r^5} r - \frac{p}{r^3}.$$

Вектор  $p$  легко найти по значению касательной составляющей  $E_{\phi}$ . Таким путем получаем

$$E^{(e)} = \frac{3a^3}{cr^5} ([vB] r) r - \frac{a^3}{cr^3} [vB].$$

Поверхностная плотность зарядов  $\sigma$  определится по скачку нормальных составляющих электрического поля. Она равна

$$\sigma = \frac{3}{4\pi c} ([vB] n),$$

где  $n$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности шара.

8. Как с помощью флюксметра можно измерить магнитное поле внутри длинного соленоида, закрытого с обоих торцов крышками из немагнитного материала, не вводя флюксметр внутрь соленоида? Обмотка соленоида доходит до самых концов цилиндра, на который она намотана.

О т в е т. Надо с помощью флюксметра, размеры которого малы по сравнению с радиусом цилиндра, измерить магнитное поле в центре одного из оснований цилиндра. Поле внутри соленоида будет в два раза больше.

9. Маленький прямолинейный магнит  $NS$  расположен в центре круглого кольца радиуса  $a$ , состоящего из  $N$  витков проволоки, концы которой соединены с баллистическим гальванометром. Ось магнита перпендикулярна к плоскости кольца. При удалении магнита из кольца баллистический гальванометр дает отброс. Как по величине этого отброса определить магнитный момент  $\mathcal{M}$  магнита?

**Решение.** При удалении магнита через цепь проходит количество электричества  $Q = \Delta\Phi/R$ , где  $\Delta\Phi$  — изменение магнитного потока через кольцо, а  $R$  — сопротивление цепи (включая сопротивление гальванометра). Для вычисления  $\Delta\Phi$  предположим сначала, что кольцо состоит только из одного витка. Магнитное поле вдали от магнита  $B = \mathfrak{M}/r^2$ . Вблизи и внутри магнита это выражение несправедливо. Однако полный магнитный поток через бесконечную плоскость, в которой расположен виток, равен нулю. Поэтому при вычислении  $\Delta\Phi$  можно взять бесконечную плоскость вне витка, где указанное выражение применимо. Иначе говоря, интегрирование можно произвести в пределах от  $r = a$  до  $r = \infty$ . Это дает  $\Delta\Phi = 2\pi\mathfrak{M}/a$ . Для кольца из  $N$  витков это выражение надо увеличить в  $N$  раз, т. е. в этом случае  $\Delta\Phi = 2\pi N \mathfrak{M}/a$ . Таким образом,

$$RQ = 2\pi N \mathfrak{M}/a.$$

Измерив  $Q$ , отсюда можно найти  $\mathfrak{M}$ .

**10.** Шарик массы  $m = 1$  г с зарядом  $q = 1$  СГСЭ-ед. помещен внутри соленоида на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может скользить без трения. Ось соленоида вертикальна. Сначала тока в обмотке соленоида не было. Затем был включен ток, и в соленоиде установилось постоянное однородное магнитное поле  $B = 100$  Гс. Во время нарастания магнитного поля возникает электрическое поле, приводящее шарик в движение. Нарастание тока происходило настолько быстро, что за время установления поля шарик не успел сместиться на заметное расстояние. Определить радиус круговой траектории, по которой будет двигаться шарик после установления магнитного поля, а также период обращения  $T$  его по этой траектории, если в начальный момент шарик находился на расстоянии  $R$  от оси соленоида. Проанализировав численные результаты, ответить на вопрос, можно ли практически наблюдать эффект с макроскопическими шариками. В чем трудности постановки опыта с заряженными макрочастицами?

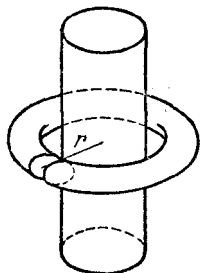


Рис. 177.

Отв.  $r = R/2$ ,  $T = 2\pi mc/(qB) \approx 60$  лет.

**11.** На цилиндрический железный сердечник, через который проходит однородный магнитный поток  $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$ , надет тор из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  (рис. 177). В торе имеется бесконечно узкий воздушный зазор, сделанный двумя бесконечно близкими разрезами вдоль меридиональных плоскостей. Найти напряженность электрического поля  $E$  в зазоре в зависимости от расстояния  $r$  до оси цилиндра.

Отв.  $E = \frac{\epsilon\omega}{2\pi cr} \Phi_0 \sin \omega t$ .

**12.** Полый диэлектрический цилиндр с внутренним радиусом  $r_1$  и наружным радиусом  $r_2$  равномерно вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей геометрической оси. Вектор индукции магнитного поля  $B$  параллелен оси цилиндра, диэлектрическая проницаемость материала цилиндра равна  $\epsilon$ . Найти: 1) объемную плотность  $\rho_{\text{связ}}$  связанных зарядов, появившихся в диэлектрике вследствие вращения в магнитном поле; 2) полный объемный заряд  $q$  единицы длины цилиндра; 3) плотности поверхностных зарядов на обеих поверхностях цилиндра; 4) полный заряд цилиндра.

**Решение.** На заряд  $e$ , вращающийся вместе с цилиндром, действует сила Лоренца  $F = \frac{e}{c} [\mathbf{v}B] = \frac{e}{c} [[\omega\mathbf{r}] B] = \frac{e}{c} (\omega B) \mathbf{r}$ . Она вызывает такую же поляризацию диэлектрика, как электрическое поле с напряженностью  $\frac{1}{c} (\omega B) \mathbf{r}$ , т. е.

$$P = \frac{\alpha}{c} (\omega B) \mathbf{r} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi c} (\omega B) \mathbf{r}.$$

Отсюда (так как  $\operatorname{div} r = \partial x/\partial x + \partial y/\partial y = 2$ )

$$\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div} P = -\frac{\epsilon - 1}{24\pi c} (\omega B),$$

$$q = \int \rho_{\text{связ}} dV = -\frac{\epsilon - 1}{2c} (\omega B) (r_2^2 - r_1^2).$$

Поверхностная плотность связанных зарядов на внутренней поверхности цилиндра

$$\sigma_1 \text{ связ} = -\frac{\epsilon - 1}{4\pi c} (\omega B) r_1,$$

на внешней

$$\sigma_2 \text{ связ} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi c} (\omega B) r_2.$$

Полный заряд цилиндра остается равным нулю.

## § 68. Индуктивность проводов. Явления при замыкании и размыкании тока

1. Рассмотрим тонкий замкнутый провод, по которому течет постоянный ток  $\mathcal{I}$  (рис. 178). Пусть  $B$  — магнитное поле этого тока. Внутри провода параллельно его оси проведем произвольный замкнутый математический контур  $s$  и установим на нем положительное направление. Пусть  $\Phi$  — магнитный поток, посылаемый вектором  $B$  через контур  $s$ . Если в пространстве нет ферромагнитных тел, то величины  $B$  и  $\Phi$  будут пропорциональны току, и можно написать

$$\Phi = L\mathcal{I}^{(m)} = \frac{1}{c} L\mathcal{I}. \quad (68.1)$$

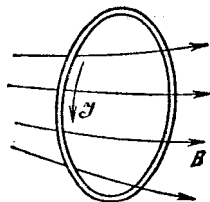


Рис. 178.

Здесь  $\mathcal{I}$  — сила тока в гауссовой системе единиц, а  $\mathcal{I}^{(m)}$  — сила того же тока в системе СГСМ. Коэффициент  $L$  не зависит от силы тока. Он определяется только размерами и конфигурацией самого провода и называется *индуктивностью* этого провода. Его называют также *самоиндукцией* или *коэффициентом самоиндукции* провода. Это определение содержит известный элемент неопределенности, поскольку точно не фиксировано, как внутри провода проведен вспомогательный математический контур  $s$ . Но для тонкого провода эта неопределенность пренебрежимо мала и не имеет никакого значения. Кроме того, от нее можно полностью освободиться, что будет сделано в § 69. Для краткости величину  $\Phi$  называют просто *магнитным потоком* через рассматриваемый замкнутый провод. Однако точный смысл этого понятия раскрывается введением вспомогательного математического контура  $s$ , как сделано выше.

При вычислении индуктивности тонкий провод нельзя заменить проводом бесконечно тонким — геометрической линией. Действи-