Отсюда (так как $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = \partial x/\partial x + \partial y/\partial y = 2$)

$$\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div} \boldsymbol{P} = -\frac{\varepsilon - 1}{2\pi c}(\boldsymbol{\omega B}),$$

$$q = \int \rho_{\text{связ}}\, dV = -\frac{\varepsilon - 1}{2c}(\boldsymbol{\omega B})(r_2^2 - r_1^2).$$

Поверхностная плотность связанных зарядов на внутренней поверхности цилиндра

$$\sigma_{1\,\text{связ}} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\boldsymbol{\omega B})\, r_1,$$

на внешней

$$\sigma_{2\,\text{связ}} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\boldsymbol{\omega B})\, r_2.$$

Полный заряд цилиндра остается равным нулю.

§ 68. Индуктивность проводов. Явления при замыкании и размыкании тока

1. Рассмотрим тонкий замкнутый провод, по которому течет постоянный ток $\mathscr{I}$ (рис. 178). Пусть $\boldsymbol{B}$ — магнитное поле этого тока. Внутри провода параллельно его оси проведем произвольный замкнутый математический контур s и установим на нем положительное направление. Пусть Φ — магнитный поток, посылаемый вектором $\boldsymbol{B}$ через контур s. Если в пространстве нет ферромагнитных тел, то величины $\boldsymbol{B}$ и Φ будут пропорциональны току, и можно написать

$$\Phi = L\mathscr{I}^{(m)} = \frac{1}{c}L\mathscr{I}. \qquad (68.1)$$

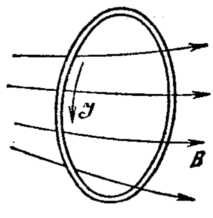

Рис. 178.

Здесь $\mathscr{I}$ — сила тока в гауссовой системе единиц, а $\mathscr{I}^{(m)}$ — сила того же тока в системе СГСМ. Коэффициент L не зависит от силы тока. Он определяется только размерами и конфигурацией самого провода и называется *индуктивностью* этого провода. Его называют также *самоиндукцией* или *коэффициентом самоиндукции* провода. Это определение содержит известный элемент неопределенности, поскольку точно не фиксировано, как внутри провода проведен вспомогательный математический контур s. Но для тонкого провода эта неопределенность пренебрежимо мала и не имеет никакого значения. Кроме того, от нее можно полностью освободиться, что будет сделано в § 69. Для краткости величину Φ называют просто *магнитным потоком* через рассматриваемый замкнутый провод. Однако точный смысл этого понятия раскрывается введением вспомогательного математического контура s, как сделано выше.

При вычислении индуктивности тонкий провод нельзя заменить проводом бесконечно тонким — геометрической линией. Действительно, в этом случае магнитное поле вблизи провода было бы пропорционально $1/r$, где r — расстояние до провода. Для магнитного потока и индуктивности мы получили бы бесконечные значения. Чем тоньше провод, тем при прочих равных условиях больше его индуктивность.

2. Для примера вычислим индуктивность соленоида, пренебрегая при этом краевыми эффектами. Пусть l — длина соленоида, N — общее число витков, S — площадь одного витка. Индукция магнитного поля внутри соленоида

$$B=\frac{4\pi}{c}\frac{\mathscr{I}N\mu}{l}.$$

Магнитный поток через один виток равен BS, а через N витков BSN, т. е.

$$\Phi=\frac{4\pi}{c}\frac{\mu N^2 S}{l}\mathscr{I}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (68.1), получим

$$L=\frac{4\pi\mu N^2 S}{l}. \tag{68.2}$$

3. За единицу магнитного потока в гауссовой системе единиц и в системе СГСМ принимают *максвелл*. Максвелл есть магнитный поток, создаваемый магнитным полем в один гаусс через перпендикулярную к нему площадку в один квадратный сантиметр. Как следует из закона Био и Савара

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mathscr{I}}{cr^3}[d\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{r}],$$

магнитный поток имеет размерность величины $\mathscr{I}l/c$. Учитывая это, из формулы (68.1) находим, что в гауссовой системе и СГСМ коэффициент самоиндукции имеет размерность длины. Его единица в этих системах называется *сантиметром*. Сантиметр есть индуктивность такого витка, в котором ток силою в одну СГСМ-единицу создает магнитный поток в один максвелл. Формула (68.2) дает индуктивность соленоида в сантиметрах.

В практических единицах (вольт, ампер, ом и т. д.) закон электромагнитной индукции и формулу (68.1) записывают в виде

$$\mathscr{E}'_{\text{инд}}=-\frac{d\Phi'}{dt}, \tag{68.3}$$

$$\Phi'=L'\mathscr{I}'. \tag{68.4}$$

Над всеми буквами здесь поставлены штрихи, которые означают, что величины, обозначаемые этими буквами, измеряются в практических единицах. Практической единицей магнитного потока является *вебер*. Эта единица определяется условием, чтобы при скорости изменения магнитного потока в 1 Вб/с в контуре возбуждалась электродвижущая сила в один вольт. Можно также сказать, что вебер есть *вольт-секунда*. Найдем соотношение между вебером и максвеллом. В гауссовой системе

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как $1\ \text{В} = \frac{1}{300}$ СГСЭ - ед. напряжения (приближенно), то

$$\mathscr{E}'_{\text{инд}}\ (\text{вольты}) = 10^{-8}\frac{d\Phi\ (\text{максвеллы})}{dt}\ (\text{точно}).$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (68.3), видим, что вебер в 10^8 раз больше максвелла:

$$1\ \text{Вб} = 10^8\ \text{Мкс}.$$

Практической единицей индуктивности является *генри*. Это есть индуктивность такого провода, в котором при силе тока в один ампер возбуждается магнитный поток в один вебер:

$$1\ \text{Г} = \frac{1\ \text{Вб}}{1\ \text{А}} = \frac{10^8\ \text{Мкс}}{\frac{1}{10}\ \text{СГСМ-ед. тока}} = 10^9\ \text{см}.$$

4. Рассмотрим явления при замыкании и размыкании постоянного тока, обусловленные индуктивностью цепи. Пусть цепь состоит из источника постоянной э.д.с. $\mathscr{E}$, катушки самоиндукции и омического сопротивления (рис. 179). Полную индуктивность цепи обозначим через L, а полное сопротивление — через R. При замыкании ключа K ток не сразу достигает предельного значения $\mathscr{E}/R$, определяемого законом Ома, а нарастает постепенно. При этом возрастает также магнитный поток, пронизывающий контур цепи. Возникает электродвижущая сила индукции и соответствующий ей индукционный ток. Этот ток называется *экстратоком замыкания*. Согласно правилу Ленца направление экстратока замыкания противоположно направлению основного тока.

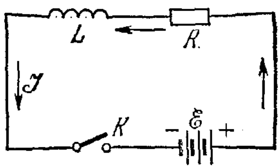

Рис. 179.

Сила переменного тока не обязательно должна быть одной и той же на всех участках провода, так как в отдельных местах возможно накопление электрических зарядов. Однако мы рассмотрим здесь только такие переменные токи, которые меняются во времени сравнительно медленно. Тогда мгновенные значения токов во всех участках неразветвленной цепи с высокой степенью точности одинаковы, а магнитные поля внутри проводов могут вычисляться по закону Био и Савара, как если бы токи были постоянными.

Такие токи называются *квазистационарными*. Для них справедливы формулы (68.3) и (68.4). Сила тока определяется выражением

$$\mathcal{J}=\frac{\mathscr{E}+\mathscr{E}^{\text{инд}}}{R}.$$

В практических единицах

$$\mathcal{J}'=\frac{\mathscr{E}'-\frac{d\Phi'}{dt}}{R'}. \tag{68.5}$$

Это — дифференциальное уравнение для квазистационарных токов. Его можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(L'\mathcal{J}')+R'\mathcal{J}'=\mathscr{E}'. \tag{68.6}$$

Если за время изменения тока провода не деформируются, то индуктивность L' постоянна и может быть вынесена из-под знака производной:

$$L'\frac{d\mathcal{J}'}{dt}+R'\mathcal{J}'=\mathscr{E}'. \tag{68.7}$$

При постоянном значении $\mathscr{E}'$ общее решение этого уравнения имеет вид

$$\mathcal{J}'=Ce^{-\frac{R'}{L'}t}+\frac{\mathscr{E}'}{R'}.$$

Постоянная интегрирования C должна определяться из начального условия: в момент замыкания, т. е. при $t=0$, ток равен нулю. Используя это условие, без труда находим

$$\mathcal{J}=\frac{\mathscr{E}}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right), \tag{68.8}$$

где τ — постоянная, имеющая размерность времени:

$$\tau=\frac{L'}{R'}. \tag{68.9}$$

Она называется *временем установления тока*. В формуле (68.8) всюду опущены штрихи, так как эта формула применима в любой системе единиц. Меняется только выражение для времени установления тока. В гауссовой системе единиц

$$\tau=\frac{L}{c^2R}. \tag{68.10}$$

Полный ток $\mathcal{J}$ состоит из двух слагаемых, из которых второе, т. е. $-(\mathscr{E}/R)\,e^{-t/\tau}$, определяет силу экстратока замыкания. При $t\to\infty$ экстраток стремится к нулю, а полный ток $\mathcal{J}$ — к своему предельному значению $\mathscr{E}/R$. Таким образом, окончательное значение тока устанавливается постепенно. Быстрота установления определяется временем τ: по истечении времени τ сила экстратока убывает в e раз.

5. Исследуем теперь процесс размыкания тока. Схема опыта изображена на рис. 180. Ключ K сначала замкнут. Направления токов показаны сплошными стрелками. Общий ток распределяется между параллельно включенными самоиндукцией L и омическим сопротивлением R. Если внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало, то ток в катушке самоиндукции будет равен $\mathcal{J}_0 = \mathcal{E}/r$. После размыкания ключа K замкнутым останется только контур $ABCD$. Первоначальный ток, существовавший в катушке самоиндукции, обладал определенным запасом магнитной энергии, которая исчезает не сразу. Магнитное поле начнет убывать. Это возбудит электродвижущую силу и индукционный ток в контуре $ABCD$. Такой ток называется *экстратоком размыкания*. На рис. 180 его направление показано пунктирными стрелками. В катушке самоиндукции экстраток течет в том же направлении, что и первоначальный ток, в остальных участках контура $ABCD$ — в противоположном направлении. Если R' — общее сопротивление контура $ABCD$, то сила тока определится из дифференциального уравнения

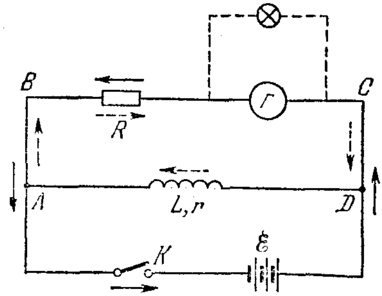

Рис. 180.

$$L' \frac{d\mathcal{J}'}{dt} + R'\mathcal{J}' = 0$$

и начального условия: $\mathcal{J}' = \mathcal{J}'_0$ при $t = 0$. Это дает

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J}'_0 e^{-t/\tau}, \tag{68.11}$$

где τ определяется прежним выражением (68.9). Электродвижущая сила индукции равна

$$\mathcal{E}'_{\text{инд}} = -L' \frac{d\mathcal{J}'}{dt} = \frac{L'\mathcal{J}'_0}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{R'}{r'} \mathcal{E}' e^{-t/\tau}. \tag{68.12}$$

Если $R' \gg r'$, то эта величина может значительно превзойти э.д.с. батареи. В этом причина электрического пробоя, наблюдающегося иногда при выключении тока в цепях, содержащих большие индуктивности.

Для демонстрации явления можно взять катушку длиной 50—60 см и диаметром 8—10 см с сердечником из железных прутьев и обмоткой из нескольких слоев проволоки диаметром около 1 мм. Параллельно катушке присоединена лампочка, как указано на рис. 180 пунктиром. Лампочка рассчитана на напряжение, несколько превышающее э. д. с. батареи. (При э. д. с. батареи в 4 В можно, например, взять лампочку на 12 В.) При замкнутой цепи лампочка горит тускло. При размыкании ключа K она ярко вспыхивает и даже может перегореть, так как э. д. с. индукции превосходит в несколько раз э. д. с. батареи.

6. Рассмотрим теперь два витка (или две катушки), по которым текут постоянные токи $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$. Установим произвольно на этих витках положительные направления обхода. Если в окружающем пространстве нет ферромагнетиков, то магнитные потоки через витки Φ_1 и Φ_2 пропорциональны токам и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{c} L_{11}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{c} L_{12}\mathcal{I}_2, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{c} L_{21}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{c} L_{22}\mathcal{I}_2. \end{aligned} \tag{68.13}$$

Коэффициенты L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22} не зависят от токов, а определяются только формой, размерами и взаимным расположением витков. Они называются *коэффициентами индуктивности.* Если $\mathcal{I}_2 = 0$, то $\Phi_1 = L_{11}\mathcal{I}_1/c$; если $\mathcal{I}_1 = 0$, то $\Phi_2 = L_{22}\mathcal{I}_2/c$. Поэтому L_{11} есть индуктивность первого, а L_{22} — второго витков. Оставшиеся два коэффициента L_{12} и L_{21} называются *взаимными индуктивностями* или *коэффициентами взаимной индукции*. Они, разумеется, измеряются теми же единицами, что и коэффициенты самоиндукции. В практической системе и системе СГСМ множитель c в формулах (68.13) опускают. Распространение этих понятий на случай системы произвольного числа проволочных витков совершенно тривиально и не нуждается в пояснении. В следующем параграфе будет доказано соотношение $L_{ik} = L_{ki}$, называемое *теоремой взаимности.*

ЗАДАЧИ

1. На тор, изготовленный из парамагнетика и имеющий регулируемый воздушный зазор d, намотана катушка (рис. 181). При $d = 0$ индуктивность катушки $L = L_0$, при $d = d_1 = 1$ мм она вдвое меньше ($L = L_1 = L_0/2$). При каком зазоре d индуктивность L будет равна $L_0/4$?

Ответ. $d = \dfrac{L_1(L_0 - L)}{L(L_0 - L_1)} d_1 = 3$ мм.

2. Вычислить индуктивность L тороидальной обмотки, намотанной на цилиндр высоты b с внутренним радиусом R и наружным $R + a$ (рис. 182). Число витков катушки равно N, магнитная проницаемость $\mu = 1$.

Ответ. $L = 2bN \ln(1 + a/R)$.

3. В предыдущей задаче по оси катушки протянут бесконечно длинный прямолинейный провод (не показанный на рис. 182). Вычислить взаимную индуктивность L_{12} между катушкой и этим проводом.

Ответ. $L_{12} = L = 2bN \ln(1 + a/R)$.

4. Внутрь тонкого воздушного соленоида вставлена маленькая плоская катушечка с числом витков $n = 40$ и площадью витка $S = 10$ см², по обмотке которой течет ток $\mathcal{I} = 1$ А. Длина соленоида $l = 50$ см, число витков в нем $N = 10\,000$.

Ось катушечки параллельна оси соленоида. Определить магнитный поток, который посылает магнитное поле катушечки через обмотку соленоида.

Ответ. $\Phi_{12} = 4\pi NnS \mathscr{I}/(cl) = 10^5$ Мкс $= 10^{-3}$ Вб.

Указание. Использовать теорему взаимности $L_{12} = L_{21}$.

5. На поверхность кругового тора прямоугольного поперечного сечения с размерами $a = 17{,}2$ см и $b = 5$ см навита обмотка тонкой проволоки, содержащая $N = 1000$ витков. (На рис. 183 изображена половина тора. Обмотка не показана.) На тор надета кольцевая катушка с числом витков $n = 100$, по обмотке

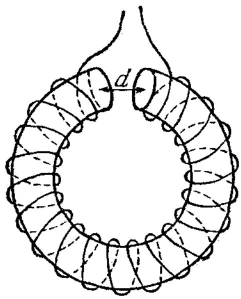

Рис. 181.

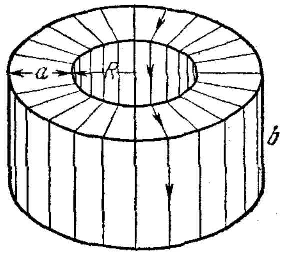

Рис. 182.

которой течет ток силою $\mathscr{I} = 1$ А. Внутренний радиус тора равен $r = 10$ см. Определить магнитный поток, который посылает магнитное поле катушки через обмотку тора.

Ответ. $\Phi_{12} = 2Nnb \mathscr{I} \ln(1 + a/r) = 10^5$ Мкс $= 10^{-3}$ Вб.

6. При отключении цепей постоянного тока, обладающих большой индуктивностью (например, обмоток возбуждения генераторов постоянного тока), эти

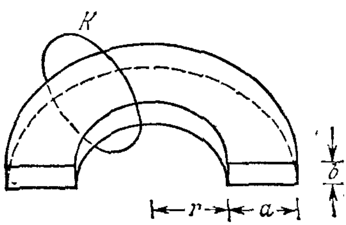

Рис. 183.

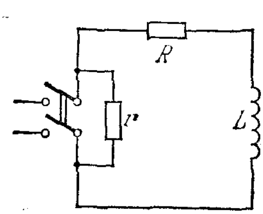

Рис. 184.

цепи предварительно замыкают на параллельно включенное сопротивление r для ограничения перенапряжений (рис. 184). Определить, во сколько раз в этом случае максимальное напряжение на зажимах цепи $V_{\text{макс}}$ будет превышать приложенное постоянное напряжение V_0.

Ответ. $V_{\text{макс}}/V_0 = r/R$. Чем меньше r, тем меньше $V_{\text{макс}}$. Однако слишком малым r брать не следует во избежание больших нагрузок на источник тока. Достаточно, чтобы $V_{\text{макс}}$ не превышало V_0, т. е. r должно быть меньше или порядка R.