§ 69. Магнитная энергия токов

1. Электрический ток обладает запасом энергии, называемой *магнитной*. При ее вычислении можно полностью отвлечься от сопротивления проводов, по которым текут токи, полагая это сопротивление равным нулю. Это не может отразиться на общности результата, так как *магнитная энергия может зависеть только от величины и распределения токов, а также от магнитных свойств среды, заполняющей пространство*. Считая же провода идеально проводящими, мы упростим рассуждение, так как в расчетах не надо будет учитывать потери энергии на джоулево тепло.

Рассмотрим сначала одиночный неподвижный замкнутый виток проволоки. Пусть в начальный момент сила тока в нем равна нулю. Будем каким-либо способом создавать и наращивать ток в витке $\mathscr{I}$. Тогда будет нарастать и магнитный поток через виток Φ. Возникнет электродвижущая сила индукции. Элементарная работа, которую должен совершить внешний источник против электродвижущей силы индукции, будет

$$\delta A^{\text{внеш}} = -\mathscr{E}^{\text{инд}}\mathscr{I}\,dt,$$

или ввиду соотношения (64.1)

$$\delta A^{\text{внеш}} = \frac{1}{c}\mathscr{I}\,d\Phi. \tag{69.1}$$

Полученное соотношение носит общий характер. Оно справедливо и для ферромагнитных материалов, так как при его выводе относительно магнитных свойств среды не вводилось никаких предположений. Однако если среда не обладает гистерезисом, в частности является пара- или диамагнитной, то работа $\delta A^{\text{внеш}}$ пойдет только на увеличение магнитной энергии W_m, так что

$$dW_m = \frac{\mathscr{I}}{c}\,d\Phi. \tag{69.2}$$

В этом параграфе мы будем предполагать, что ферромагнетики отсутствуют. Тогда $\Phi = L\mathscr{I}/c$, причем для неподвижного провода самоиндукция L остается постоянной. Используя это и интегрируя, получим

$$W_m = \frac{L}{2}\left(\frac{\mathscr{I}}{c}\right)^2 = \frac{1}{2c}\mathscr{I}\Phi = \frac{\Phi^2}{2L}. \tag{69.3}$$

(В практической системе и системе СГСМ вместо $\mathscr{I}/c$ следует писать просто $\mathscr{I}$.) Для справедливости формулы (69.3) несущественно, что во время нарастания тока виток оставался неподвижным, так как энергия зависит только *от состояния системы*, но не от способа, каким было достигнуто это состояние. Например, переход в конечное состояние можно осуществлять следующим образом. Пока в проводе нет тока, деформируем его, чтобы он принял окончательную конфигурацию. Это не требует затраты работы. Затем, сохраняя провод неподвижным, будем наращивать ток до конечного значения $\mathcal{I}$. На это потребуется работа $L\mathcal{I}^2/(2c^2)$. Она и будет равна искомому приращению магнитной энергии. Приведенное рассуждение показывает, что в формуле (69.3) под L следует понимать самоиндукцию витка в конечном состоянии.

Формула (69.3) освобождает понятие самоиндукции от той неопределенности, на которую было указано в § 68. Действительно, ток $\mathcal{I}$ и магнитная энергия W_m — величины, определяемые совершенно однозначно. Поэтому по формуле (69.3) можно вычислить также совершенно однозначно и коэффициент самоиндукции L. Более того, эта формула может служить для определения L и в тех случаях, когда провод толстый.

2. Обобщим теперь формулу (69.3) на случай произвольного числа витков. Предполагая опять все витки неподвижными, будем увеличивать токи в них. Тогда для элементарной работы против электродвижущей силы индукции можно по аналогии с формулой (69.1) написать

$$\delta A^{\text{внеш}} = \frac{1}{c} \sum_i \mathcal{I}_i \, d\Phi_i, \tag{69.4}$$

где суммирование ведется по всем виткам. Магнитная энергия в конечном состоянии представится интегралом

$$W_m = \frac{1}{c} \int \sum \mathcal{I}'_i \, d\Phi'_i,$$

где штрихованными буквами $\mathcal{I}'_i$ и Φ'_i обозначены переменные (текущие) значения соответствующих величин. Символы $\mathcal{I}_i$ и Φ_i сохранены для обозначения токов и магнитных потоков в конечном состоянии.

Для вычисления интеграла заметим, что его величина не зависит от «пути интегрирования», т. е. от характера изменения силы токов в проводах. Можно, например, возбуждать токи последовательно: сначала создать ток только в первом витке, доведя его значение до величины $\mathcal{I}_1$, затем, не меняя $\mathcal{I}_1$, начать возбуждать ток во втором витке и т. д. Но можно возбуждать токи сразу во всех витках и притом независимо друг от друга. Результат вычисления магнитной энергии во всех случаях будет один и тот же. Чтобы упростить расчет, будем наращивать все токи одновременно и притом так, чтобы они оставались пропорциональными друг другу. Таким образом, в любой момент будет соблюдаться соотношение $\mathcal{I}'_i = \lambda\mathcal{I}_i$, где λ — переменная величина, не зависящая от i. В начальном состоянии $\lambda = 0$, в конечном $\lambda = 1$. Так как при отсутствии ферромагнитных материалов магнитные потоки связаны с токами линейно, то для них справедливы такие же соотношения, т. е. $\Phi'_i = \lambda\Phi_i$, а потому $d\Phi_i' = \Phi_i d\lambda$. Таким образом,

$$W_m = \frac{1}{c}\sum \mathcal{J}_i\Phi_i \int_0^1 \lambda\, d\lambda,$$

или после интегрирования

$$W_m = \frac{1}{2c}\sum \mathcal{J}_i\Phi_i = \frac{1}{2c^2}\sum\sum L_{ik}\mathcal{J}_i\mathcal{J}_k. \qquad (69.5)$$

3. При расчете предполагалось, что в процессе намагничивания магнитная проницаемость μ оставалась постоянной. Только при этом условии связь между токами и магнитными потоками будет линейной. Можно показать (см. § 73), что если μ зависит от температуры, то при намагничивании температура магнетика, а с ней и величина μ будут меняться. В этом случае расчет неприменим. Однако он становится применимым, если при намагничивании температуру поддерживать постоянной. Тогда величина W_m будет иметь смысл работы, совершаемой над системой при изотермическом и квазистатическом нарастании тока в проводах. Такая работа в термодинамике называется *свободной энергией*. Таким образом, формулы (69.3) и (69.5) в общем случае определяют не внутреннюю, а *свободную магнитную энергию системы*. Здесь все обстоит так же, как и в аналогичном вопросе электростатики (см. § 28, пункт 4).

4. Используя формулы (69.4) и (69.5), докажем теорему взаимности для коэффициентов взаимной индукции, о которой говорилось в предыдущем параграфе. Согласно этой теореме матрица коэффициентов L_{ik} симметрична, т. е.

$$L_{ik} = L_{ki}. \qquad (69.6)$$

Достаточно доказать это соотношение для какой-либо пары индексов, например $i = 1$, $k = 2$. Так как коэффициенты L_{ik} не зависят от токов, то с целью упрощения вычислений можно предположить, что токи текут только по виткам 1 и 2, а в остальных витках токи равны нулю. Если бесконечно мало изменить токи $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$, то на это потребуется затратить работу

$$\delta A^{\text{внеш}} = \frac{1}{c}(\mathcal{J}_1\, d\Phi_1 + \mathcal{J}_2\, d\Phi_2).$$

Она пойдет на приращение магнитной энергии токов $dW_m = \delta A^{\text{внеш}}$. Но эта энергия в рассматриваемом случае дается выражением

$$W_m = \frac{1}{2c}(\mathcal{J}_1\Phi_1 + \mathcal{J}_2\Phi_2),$$

а ее приращение — выражением

$$dW_m = \frac{1}{2c}(\mathcal{J}_1\, d\Phi_1 + \mathcal{J}_2\, d\Phi_2) + \frac{1}{2c}(\Phi_1\, d\mathcal{J}_1 + \Phi_2\, d\mathcal{J}_2).$$

Сравнивая оба выражения для dW_m, получим

$$\mathcal{I}_1\,d\Phi_1+\mathcal{I}_2\,d\Phi_2=\Phi_1\,d\mathcal{I}_1+\Phi_2\,d\mathcal{I}_2. \qquad (69.7)$$

Это соотношение справедливо при любых значениях $d\mathcal{I}_1$ и $d\mathcal{I}_2$. Поэтому для сокращения последующих вычислений можно взять $d\mathcal{I}_2=0$, т. е. $\mathcal{I}_2=\text{const}$. Магнитные потоки определяются выражениями

$$\Phi_1=\frac{1}{c}(L_{11}\mathcal{I}_1+L_{12}\mathcal{I}_2), \qquad \Phi_2=\frac{1}{c}(L_{21}\mathcal{I}_1+L_{22}\mathcal{I}_2).$$

Из них дифференцированием при постоянном $\mathcal{I}_2$ находим

$$d\Phi_1=\frac{1}{c}L_{11}\,d\mathcal{I}_1, \qquad d\Phi_2=\frac{1}{c}L_{21}\,d\mathcal{I}_1.$$

Подставляя эти выражения в соотношение (69.7), получим

$$L_{11}\mathcal{I}_1\,d\mathcal{I}_1+L_{21}\mathcal{I}_2\,d\mathcal{I}_1=(L_{11}\mathcal{I}_1+L_{12}\mathcal{I}_2)\,d\mathcal{I}_1.$$

Отсюда следует $L_{12}=L_{21}$, и теорема взаимности доказана. При доказательстве сопротивления проводов не учитывались. Но это не имеет значения, так как коэффициенты взаимной индукции L_{ik} зависят только от формы и расположения проводов, а также от распределения плотности электрического тока по их сечениям.

5. В заключение этого параграфа разберем следующий парадокс. Сила $\boldsymbol{f}=\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]$, действующая в магнитном поле на движущийся заряд, перпендикулярна к его скорости $\boldsymbol{v}$, а потому работы не производит. Почему же при движении витка с током (например, якоря электромотора) в магнитном поле механическая работа над проводником, несомненно, производится? Дело в том, что это не есть полная работа магнитного поля над движущимися зарядами, являющимися носителями тока в проводнике. Рассмотрим тождество

$$\frac{1}{c}[\boldsymbol{j}\boldsymbol{B}]\,\boldsymbol{v}=-\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\,\boldsymbol{j},$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость проводника, а $\boldsymbol{j}$ — плотность электрического тока в нем. Слева стоит работа амперовой силы $\boldsymbol{f}_{\text{амп}}=\frac{1}{c}[\boldsymbol{j}\boldsymbol{B}]$ над единицей объема проводника в единицу времени, справа — взятая со знаком минус такая же работа электрического поля индукции $\boldsymbol{E}_{\text{инд}}$, возникающего при движении проводника. Полная работа $A_{\text{полн}}=A_{\text{амп}}+A_{\text{инд}}$ равна нулю. Допустим теперь, что в цепь включена батарея или какой-либо другой источник тока. Тогда добавится работа батареи; $A_{\text{полн}}=A_{\text{амп}}+A_{\text{инд}}+A_{\text{бат}}$. Пусть электродвижущая сила батареи подобрана так, что она в каждый момент времени компенсирует электродвижущую силу индукции, поддерживая ток в цепи постоянным. Тогда $A_{\text{инд}}+A_{\text{бат}}=0$, и если потери на джоулево тепло пренебрежимо малы, то $A_{\text{полн}}=A_{\text{амп}}$. Таким образом, работа $A_{\text{амп}}$ производится за счет энергии батареи.