§ 70. Локализация магнитной энергии в пространстве

1. Формулы (69.2) выражают магнитную энергию *через токи и магнитные потоки*. В таком виде величина (69.3) может рассматриваться как *потенциальная энергия токов*, взаимодействующих по закону Ампера. Это соответствует представлению о непосредственном действии на расстоянии. Но выражение для магнитной энергии можно преобразовать в другую форму, которая соответствует совершенно иному представлению о месте нахождения энергии. Покажем это на примере длинного соленоида, по поверхности которого циркулирует ток с линейной плотностью $i = \mathscr{I}/l$ (l — длина соленоида). Мы не будем пользоваться выражениями (69.3) для энергии токов, так как они справедливы лишь при условии, что векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ связаны соотношением $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, а воспользуемся общей формулой (69.2), справедливость которой предполагает только, что между $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ существует какая-то однозначная, но не обязательно линейная функциональная связь (нет гистерезиса). Пренебрегая краевыми эффектами, можно написать для поля H внутри соленоида $H = 4\pi i/c = 4\pi\mathscr{I}/(cl)$, откуда $\mathscr{I} = clH/(4\pi)$. Пусть S — площадь поперечного сечения соленоида. Тогда $\Phi = BS$, и, следовательно,

$$dW_m = \frac{\mathscr{I}}{c}\,d\Phi = \frac{1}{4\pi}\,lSH\,dB = \frac{V}{4\pi}\,(\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B})$$

($V = Sl$ — объем соленоида). Если w_m — магнитная энергия, приходящаяся на единицу объема соленоида, то для ее дифференциала можно написать

$$dw_m = \frac{1}{4\pi}\,(\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B}). \tag{70.1}$$

И в общем случае постоянных электрических токов, произвольным образом текущих в пространстве, можно доказать, что выражение для магнитной энергии может быть преобразовано к виду

$$W_m = \int w_m\,dV, \tag{70.2}$$

где w_m определяется прежней формулой (70.1). Это — чисто математический вопрос, совершенно аналогичный соответствующему вопросу в электростатике. Опуская здесь математические преобразования, остановимся только на физическом смысле формулы (70.2). Ее можно истолковать в том смысле, что *магнитная энергия локализована в пространстве с объемной плотностью* w_m. Это соответствует представлениям теории поля. В рамках учения о постоянных токах и постоянных магнитных полях нельзя указать ни одного опыта, который бы решал вопрос в пользу одного из двух представлений о локализации магнитной энергии: представления теории непосредственного действия на расстоянии и представления теории поля.

Здесь дело обстоит совершенно так же, как в электростатике. Лишь явления в быстропеременных полях, например распространение электромагнитных волн, позволяют сделать соответствующий выбор. Они согласуются только с представлением теории поля о локализации магнитной энергии в пространстве. В случае быстропеременных полей формулы (69.3) просто лишены смысла.

В случае пара- и диамагнитных сред $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ и выражение (70.1) можно проинтегрировать. Таким путем получим

$$w_m = \frac{1}{8\pi}\mu H^2 = \frac{1}{8\pi} HB = \frac{B^2}{8\pi\mu}. \tag{70.3}$$

2. Приведем теперь математическое доказательство формулы (70.2). Как будет видно из доказательства, можно ограничиться магнитным полем одного витка. Обобщение на случай многих витков чисто формальное и не встречает никаких затруднений. Считая виток неподвижным и полагая в формуле (69.2) $d\Phi = \int_S d\boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}$, получим

$$dW_m = \frac{\mathcal{J}}{c}\int_S d\boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S},$$

где интегрирование ведется по произвольной поверхности, натянутой на контур тока l. Дальнейшие преобразования используют понятие векторного потенциала. Можно доказать (см. задачи 1 и 2 к этому параграфу), что всякий вектор, дивергенция которого равна нулю, может быть представлен в виде ротора другого вектора. Так как $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, то на этом основании можно написать

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{70.4}$$

Вектор $\boldsymbol{A}$ и называется *векторным потенциалом* магнитного поля. Из формулы (70.4) следует: $d\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} d\boldsymbol{A}$. Используя это соотношение и применяя теорему Стокса, находим

$$dW_m = \frac{\mathcal{J}}{c}\int_S d\boldsymbol{S} \operatorname{rot} d\boldsymbol{A} = \frac{\mathcal{J}}{c}\oint_l (d\boldsymbol{l}\, d\boldsymbol{A}).$$

Вместо линейного введем объемный элемент тока $\boldsymbol{j}\, dV = \mathcal{J}\, d\boldsymbol{l}$ и воспользуемся теоремой о циркуляции $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 4\pi \boldsymbol{j}/c$. Тогда

$$dW_m = \frac{1}{4\pi}\int_V (d\boldsymbol{A} \operatorname{rot} \boldsymbol{H})\, dV,$$

где интеграл распространен по всему пространству, по которому течет ток. Применяя известное тождество векторного анализа (см. задачу 3 к этому параграфу), преобразуем подынтегральное выражение к виду

$$d\boldsymbol{A} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{div}[\boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{A}] + \boldsymbol{H} \operatorname{rot} d\boldsymbol{A} = \operatorname{div}[\boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{A}] + \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{B}.$$

Интеграл от дивергенции можно преобразовать в поверхностный, взяв в качестве поверхности интегрирования бесконечно удаленную поверхность. Если все токи текут в конечной области пространства, то магнитное поле будет убывать на бесконечности достаточно быстро и рассматриваемый интеграл обратится в нуль.

В результате получится

$$dW_m=\frac{1}{4\pi}\int\limits_V (H\,dB)\,dV.$$

Отсюда после интегрирования по dB получим

$$W_m=\int w_m\,dV, \text{ где } w_m=\frac{1}{4\pi}\int H\,dB.$$

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что для произвольного вектора $\boldsymbol{A}$ справедливо соотношение $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0$.

2. Доказать, что если $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$, то вектор $\boldsymbol{B}$ может быть представлен в виде $\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$.

Решение. Содержание теоремы сводится к утверждению, что уравнение $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{B}$ — заданный, а $\boldsymbol{A}$ — неизвестный вектор, имеет решение. Покажем, например, что существует решение, в котором $A_z=0$. В этом случае рассматриваемое уравнение сводится к системе трех скалярных уравнений:

$$\frac{\partial A_y}{\partial z}=-B_x, \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z}=B_y, \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=B_z.$$

Первым двум уравнениям можно удовлетворить, полагая

$$A_y=-\int\limits_{z_0}^{z} B_x\,dz+f(x, y), \qquad A_x=\int\limits_{z_0}^{z} B_y\,dz,$$

где $f(x, y)$ — произвольная функция. Подставляя это решение в третье уравнение и учитывая, что $\partial B_x/\partial x+\partial B_y/\partial y=-(\partial B_z/\partial z)$, получим

$$\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\partial B_z}{\partial z}\,dz+\frac{\partial f}{\partial x}=B_z,$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=B_z(x, y, z_0)$$

и, далее,

$$f(x, y)=\int B_z(x, y, z_0)\,dx.$$

Таким образом, найдено одно из решений уравнения $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, и теорема доказана. Заметим, что это уравнение при условии $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$ имеет бесчисленное множество решений, т. е. векторный потенциал определен не однозначно.

3. Доказать тождество

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{AB}]=\boldsymbol{B}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}. \tag{70.5}$$

Решение. В справедливости этого тождества нетрудно убедиться непосредственной проверкой, если записать его в прямоугольных координатах. Однако выкладки получатся более простыми и естественными, если применить символический метод. На основании определения векторного произведения и дивергенции

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{AB}]=\operatorname{div}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}.$$

Переставив первую строку полученного определителя со второй, а затем с третьей, соблюдая при этом известное правило знаков, получим два новых определителя:

$$-\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad +\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Оба эти определителя, однако, не равны исходному определителю. Это связано с тем, что к рассматриваемому определителю обычное правило перестановки строк неприменимо, так как первая строка его состоит не из чисел, а из операторов. Пользуясь правилом дифференцирования произведения, нетрудно, однако, заметить, что сумма определителей, полученных в результате перестановки, равна исходному определителю, т. е.

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{AB}] = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Очевидно, это соотношение можно переписать так:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{AB}] = \boldsymbol{B}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{A}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

или

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{AB}] = \boldsymbol{B}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}.$$

§ 71. Теорема о сохранении магнитного потока

Допустим, что виток с током находится в произвольном магнитном поле — постоянном или переменном. Пусть он движется и деформируется произвольным образом. При этом в витке возбуждается индукционный ток

$$\mathcal{J} = \frac{\mathscr{E}^{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{cR}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Если омическое сопротивление R равно нулю, то должно быть $\mathscr{E}^{\text{инд}} = 0$, так как в противном случае в проводнике возникли бы бесконечно большие токи, что физически невозможно. Значит, должно быть $d\Phi/dt = 0$, а потому $\Phi = \text{const}$. Таким образом, *при движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остается постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода.* Это положение называется *теоремой о сохранении магнитного потока.* Такое сохранение обусловлено индукционными токами, которые, согласно правилу Ленца, препятствуют всякому изменению магнитного потока через контур провода. Магнитный поток, обусловленный внешним магнитным полем, не остается постоянным. Магнитный поток, создаваемый индукционными токами, также меняется во времени. Однако сумма этих двух потоков остается постоянной.