

Переставив первую строку полученного определителя со второй, а затем с третьей, соблюдая при этом известное правило знаков, получим два новых определителя:

$$-\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad +\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Оба эти определителя, однако, не равны исходному определителю. Это связано с тем, что к рассматриваемому определителю обычное правило перестановки строк неприменимо, так как первая строка его состоит не из чисел, а из операторов. Пользуясь правилом дифференцирования произведения, нетрудно, однако, заметить, что сумма определителей, полученных в результате перестановки, равна исходному определителю, т. е.

$$\operatorname{div} [AB] = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Очевидно, это соотношение можно переписать так:

$$\operatorname{div} [AB] = B \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

или

$$\operatorname{div} [AB] = B \operatorname{rot} A - A \operatorname{rot} B.$$

## § 71. Теорема о сохранении магнитного потока

Допустим, что виток с током находится в произвольном магнитном поле — постоянном или переменном. Пусть он движется и деформируется произвольным образом. При этом в витке возбуждается индукционный ток

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{cR} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Если омическое сопротивление  $R$  равно нулю, то должно быть  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = 0$ , так как в противном случае в проводнике возникли бы бесконечно большие токи, что физически невозможно. Значит, должно быть  $d\Phi/dt = 0$ , а потому  $\Phi = \text{const}$ . Таким образом, при движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остается постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода. Это положение называется теоремой о сохранении магнитного потока. Такое сохранение обусловлено индукционными токами, которые, согласно правилу Ленца, препятствуют всякому изменению магнитного потока через контур провода. Магнитный поток, обусловленный внешним магнитным полем, не остается постоянным. Магнитный поток, создаваемый индукционными токами, также меняется во времени. Однако сумма этих двух потоков остается постоянной.

Представим себе теперь идеально проводящую жидкость, движущуюся в магнитном поле. Выделим в ней произвольный жидкий замкнутый контур, т. е. контур, движущийся вместе с частицами самой жидкости. Такой контур может играть роль идеально проводящего провода, и к нему применима теорема о сохранении магнитного потока. Из нее следует, что *при любых движениях идеально проводящей жидкости магнитный поток, пронизывающий всякий замкнутый жидкий контур, не меняется во времени.* Идеально проводящая жидкость может свободно течь вдоль магнитных силовых трубок. Но всякое движение ее поперек магнитного поля увлекает и эти силовые трубки. Явление происходит так, как если бы магнитные силовые линии были *вморожены в вещество* и двигались вместе с ним. Такое представление о вмороженности магнитных силовых линий широко применяется в магнитной гидродинамике при рассмотрении движений жидкостей, обладающих высокой электропроводностью. Оно применяется также в астрофизике и физике горячей плазмы, поскольку последняя также обладает высокой электропроводностью (см. § 121).

### ЗАДАЧИ

1. Сверхсильные магнитные поля можно получать взрывным сжатием отрезка проводящей цилиндрической трубы, внутри которой создано начальное магнитное поле  $B_0$ . Определить магнитное поле  $B$  в трубе в момент максимального сжатия, если  $B_0 = 5 \cdot 10^4$  Гс, начальный внутренний радиус трубы  $R = 5$  см, радиус в момент максимального сжатия  $r = 0,5$  см. Оболочку, окружающую магнитное поле, считать идеально проводящей. Определить также давление  $\mathcal{P}$ , необходимое для получения такого сжатия.

О т в е т.  $B = B_0 (R/r)^2 = 5 \cdot 10^6$  Гс,  $\mathcal{P} = B^2/(8\pi) \approx 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> =  $10^6$  атм.

2. По длинному идеально проводящему соленоиду длины  $l_0$ , отключенному от источника напряжения, течет постоянный ток  $\mathcal{I}_0$ . Как будет меняться ток  $\mathcal{I}$  в соленоиде при его растяжениях и сжатиях?

О т в е т.  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 l/l_0$ , где  $l$  — мгновенная длина соленоида.

## § 72. Энергия и силы

1. Наиболее общим методом расчета сил взаимодействия проводов с токами, а также натяжений и давлений, возникающих в среде при наличии магнитного поля, является *энергетический метод*. В этом методе используется выражение для свободной энергии магнитного поля. Как и сама свободная энергия, указанные силы зависят от *величины и конфигурации токов*, но не зависят при прочих равных условиях от удельного сопротивления проводов. Поэтому можно упростить вычисления, отвлекаясь от сопротивления проводов, и не принимать во внимание потери энергии на джоулево тепло. Под действием внутренних сил рассматриваемая система тел, вообще говоря, не будет находиться в равновесии и придет в движение. Для предотвращения этого приложим внешние