Представим себе теперь идеально проводящую жидкость, движущуюся в магнитном поле. Выделим в ней произвольный жидкий замкнутый контур, т. е. контур, движущийся вместе с частицами самой жидкости. Такой контур может играть роль идеально проводящего провода, и к нему применима теорема о сохранении магнитного потока. Из нее следует, что *при любых движениях идеально проводящей жидкости магнитный поток, пронизывающий всякий замкнутый жидкий контур, не меняется во времени.* Идеально проводящая жидкость может свободно течь вдоль магнитных силовых трубок. Но всякое движение ее поперек магнитного поля увлекает и эти силовые трубки. Явление происходит так, как если бы магнитные силовые линии были *вморожены в вещество* и двигались вместе с ним. Такое представление о вмороженности магнитных силовых линий широко применяется в магнитной гидродинамике при рассмотрении движений жидкостей, обладающих высокой электропроводностью. Оно применяется также в астрофизике и физике горячей плазмы, поскольку последняя также обладает высокой электропроводностью (см. § 121).

ЗАДАЧИ

1. Сверхсильные магнитные поля можно получать взрывным сжатием отрезка проводящей цилиндрической трубы, внутри которой создано начальное магнитное поле B_0. Определить магнитное поле B в трубе в момент максимального сжатия, если $B_0 = 5\cdot 10^4$ Гс, начальный внутренний радиус трубы $R = 5$ см, радиус в момент максимального сжатия $r = 0{,}5$ см. Оболочку, окружающую магнитное поле, считать идеально проводящей. Определить также давление $\mathscr{P}$, необходимое для получения такого сжатия.

Ответ. $B = B_0\,(R/r)^2 = 5\cdot 10^6$ Гс, $\mathscr{P} = B^2/(8\pi) \approx 10^{12}$ дин/см^2 = 10^6 атм.

2. По длинному идеально проводящему соленоиду длины l_0, отключенному от источника напряжения, течет постоянный ток $\mathscr{I}_0$. Как будет меняться ток $\mathscr{I}$ в соленоиде при его растяжениях и сжатиях?

Ответ. $\mathscr{I} = \mathscr{I}_0 l/l_0$, где l — мгновенная длина соленоида.

§ 72. Энергия и силы

1. Наиболее общим методом расчета сил взаимодействия проводов с токами, а также натяжений и давлений, возникающих в среде при наличии магнитного поля, является *энергетический метод.* В этом методе используется выражение для свободной энергии магнитного поля. Как и сама свободная энергия, указанные силы зависят от *величины* и *конфигурации токов*, но не зависят при прочих равных условиях от удельного сопротивления проводов. Поэтому можно упростить вычисления, отвлекаясь от сопротивления проводов, и не принимать во внимание потери энергии на джоулево тепло. Под действием внутренних сил рассматриваемая система тел, вообще говоря, не будет находиться в равновесии и придет в движение. Для предотвращения этого приложим внешние силы, уравновешивающие внутренние силы. Если бесконечно мало нарушить равновесие, то начнется бесконечно медленный (квазистатический) процесс, сопровождающийся перемещениями и деформациями проводов и окружающей среды. Кинетическая энергия, как и во всяком квазистатическом процессе, при этом возникать не будет. Будем поддерживать во время процесса температуру постоянной. Тогда работа внешних сил $\delta A^{\text{внеш}}$ пойдет на приращение свободной энергии системы. Среду между проводами будем предполагать изотропной — жидкой или газообразной. В статических и медленно меняющихся магнитных полях, как это было выяснено в электростатике (см. § 33, пункт 5), упругая часть свободной энергии компенсируется членами, содержащими производные магнитной проницаемости по плотности среды. Поэтому при расчете сил можно отвлечься от наличия упругой части свободной энергии, если при этом одновременно не учитывать зависимость магнитной проницаемости μ от плотности среды. Так мы и поступим. Опуская упругую часть свободной энергии, пишем $\delta A^{\text{внеш}} = \delta W_m$. А так как для квазистатического процесса $\delta A^{\text{внеш}} = -\delta A$, где δA — элементарная работа внутренних сил, то

$$\delta A = -[\delta W_m]_{\Phi=\text{const}}. \tag{72.1}$$

При доказательстве предполагалось, что провода идеально проводящие, а потому магнитные потоки, пронизывающие их, *остаются постоянными*. Это явно отмечено в формуле (72.1). Однако сама формула (72.1) остается справедливой и для проводов с *конечным омическим сопротивлением*. Дело в том, что силы взаимодействия и магнитное поле в среде явно зависят только от сил токов и их распределения по проводам, но *не зависят от сопротивления проводов*. Поэтому, если при проведении квазистатического процесса с реальными проводами каким-либо способом поддерживать магнитные потоки Φ неизменными, то при прочих равных условиях работа δA останется той же самой, что и в случае идеально проводящих проводов. Различие заключается только в том, что в случае идеально проводящих проводов магнитные потоки сохраняются автоматически, а в случае проводов с конечным омическим сопротивлением требуются специальные меры, чтобы обеспечить такое сохранение. Но для вычисления сил взаимодействия это обстоятельство не имеет никакого значения.

2. Формула (72.1) является *основной* при расчете сил в магнитном поле энергетическим методом. Однако в ряде случаев более удобна другая формула, в которой варьирование магнитной энергии W_m производится при сохранении постоянными *сил токов* в проводах. Выведем эту формулу.

Для поддержания постоянства токов во всех витках введем внешние электродвижущие силы $\mathscr{E}_i^{\text{внеш}}$, которые бы в каждый момент времени уравновешивали электродвижущие силы индукции, возникающие во время квазистатического процесса. Для этого должно быть $\mathscr{E}_i^{\text{внеш}} = -\mathscr{E}_i^{\text{инд}} = \frac{1}{c}\frac{d\Phi_i}{dt}$. Работа этих внешних электродвижущих сил

$$\delta A^{\text{внеш}} = \frac{1}{c}\sum \frac{d\Phi_i}{dt}\mathscr{I}_i\,dt = \frac{1}{c}\sum \mathscr{I}_i\,d\Phi_i$$

пойдет на работу системы δA и на приращение магнитной энергии:

$$\delta A + \delta W_m = \frac{1}{c}\sum \mathscr{I}_i\,d\Phi_i.$$

(Мы по-прежнему проводим рассуждение в предположении идеальной проводимости проводов.) Но если токи поддерживаются постоянными, то для вариации магнитной энергии можно написать

$$\delta W_m = \delta\left(\frac{1}{2c}\sum \mathscr{I}_i\Phi_i\right) = \frac{1}{2c}\sum \mathscr{I}_i\,\delta\Phi_i.$$

Введя это выражение в предыдущее соотношение, получим

$$\delta A = [\delta W_m]_{\mathscr{I}=\text{const}}, \tag{72.2}$$

где вариация магнитной энергии производится уже при постоянных токах. Это и есть *другая основная формула*, на которой основан энергетический метод расчета сил.

Приведем примеры на применение формул (72.1) и (72.2).

3. Магнитное взаимодействие замкнутых постоянных токов в однородной среде. Магнитная энергия двух витков с токами определяется выражением

$$W_m = \frac{1}{2}L_{11}\mathscr{I}_1^2 + L_{12}\mathscr{I}_1\mathscr{I}_2 + \frac{1}{2}L_{22}\mathscr{I}_2^2.$$

Будем пользоваться формулой (72.2). Если произвольным образом, но без деформаций сместить витки 1 и 2, то ввиду однородности среды коэффициенты самоиндукции L_{11} и L_{22} меняться не будут. Если при этом поддерживать токи в витках постоянными, то единственным переменным слагаемым в выражении для W_m будет $L_{12}\mathscr{I}_1\mathscr{I}_2$, так что

$$[\delta W_m]_{\mathscr{I}=\text{const}} = \mathscr{I}_1\mathscr{I}_2\,\delta L_{12}. \tag{72.3}$$

Оставляя виток 2 неподвижным, сместим виток 1 как целое на отрезок $\delta\boldsymbol{r}_1$. Элементарная работа, совершаемая системой, при этом будет $\delta A = \boldsymbol{F}_1\delta\boldsymbol{r}_1$, где $\boldsymbol{F}_1$ — результирующая амперовых сил, действующих на виток 1. Согласно формуле (72.2) $\boldsymbol{F}_1\delta\boldsymbol{r}_1 = \mathscr{I}_1\mathscr{I}_2\delta L_{12}$. Сместим теперь виток 2 на отрезок $\delta\boldsymbol{r}_2 = -\delta\boldsymbol{r}_1$, сохраняя неподвижным виток 1. Изменение коэффициента взаимной индукции будет тем же самым, так как этот коэффициент зависит только от взаимного расположения витков. Поэтому $\boldsymbol{F}_2\delta\boldsymbol{r}_2 = \mathscr{I}_1\mathscr{I}_2\delta L_{12}$. Таким образом, $\boldsymbol{F}_1\delta\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{F}_2\delta\boldsymbol{r}_2$, или $\boldsymbol{F}_1\delta\boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{F}_2\delta\boldsymbol{r}_1$. Отсюда, ввиду произвольности смещения $\delta\boldsymbol{r}_1$, следует, что $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$. Поворачивая один виток относительно другого, таким же путем докажем, что $\boldsymbol{M}_1 = -\boldsymbol{M}_2$, где $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ — моменты амперовых сил, действующих на витки. Таким образом, магнитное взаимодействие замкнутых постоянных токов удовлетворяет принципу равенства действия и противодействия.

4. Так как коэффициент взаимной индукции L_{12} пропорционален магнитной проницаемости μ промежуточной среды, то из приведенного рассуждения следует также, что и *силы взаимодействия между проводами в однородной среде пропорциональны ее магнитной проницаемости*. При одних и тех же токах сила взаимодействия между проводами в вакууме возрастает в μ раз, если все пространство заполнить однородной средой с магнитной проницаемостью μ.

5. Силы, действующие на границе раздела двух магнетиков. Допустим сначала, что магнитное поле перпендикулярно к границе раздела магнетиков. Это можно реализовать, взяв достаточно длинный соленоид, одна половина которого заполнена магнетиком с магнитной проницаемостью μ_1, а другая — с магнитной проницаемостью μ_2. Магнетики граничат между собой вдоль плоскости, перпендикулярной к оси соленоида (рис. 185).

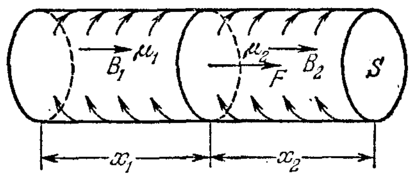

Рис. 185.

Токи, циркулирующие по боковой поверхности соленоида, можно подобрать так, чтобы поле $\boldsymbol{B}$ внутри соленоида вдали от его концов было однородно. Пространство вне соленоида должно быть заполнено соответствующими магнетиками, чтобы последние могли свободно входить и выходить из соленоида. В выражении для магнитной энергии можно отвлечься от краевых эффектов, так как при расчете сил существенна не сама энергия, а ее вариации, возникающие при смещении границы раздела. Эти же вариации, если только соленоид достаточно длинный, не зависят от неоднородности поля вблизи его краев. Для вычисления силы $\boldsymbol{F}$, действующей на границу раздела магнетиков, сместим эту границу вправо на величину δx. При этом система совершит работу $F\,\delta x$. Будем производить это смещение с сохранением магнитного потока, пронизывающего соленоид, или, что то же самое, с сохранением индукции $\boldsymbol{B}$. Тогда согласно формуле (72.1) $F\,\delta x = -[dW_m]_{B=\text{const}}$. При смещении границы на δx вещество первого магнетика будет входить в соленоид, его объем внутри соленоида увеличится на $S\,\delta x$, где S — площадь поперечного сечения соленоида. Вследствие этого магнитная энергия системы увеличится на $Sw_1\delta x$. Такой же объем второго магнетика выйдет из соленоида и унесет с собой энергию $Sw_2\delta x$. Энергия магнитного поля вне соленоида и вблизи его концов не изменится. Таким образом, увеличение магнитной энергии системы будет $\delta W_m = S(w_1 - w_2)\,\delta x$, где w_1 и w_2 — плотности магнитной энергии по разные стороны границы раздела. Приравнивая эту величину выражению $-F\delta x$, получим

$$F = S(w_2 - w_1). \qquad (72.4)$$

За положительное мы приняли направление вправо, т. е. от первого магнетика ко второму. Поэтому полученное выражение для F может быть истолковано как *разность натяжений*, действующих на границу раздела со стороны обоих магнетиков. Натяжение, приходящееся на единицу площади, равно плотности магнитной энергии. Так как $B = \text{const}$, то

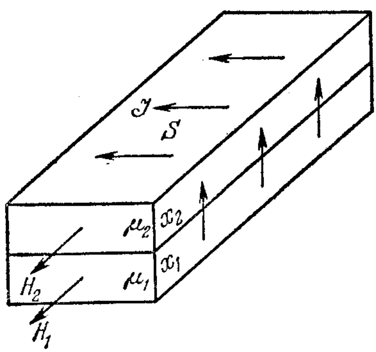

Рис. 186.

$$F = S\frac{B^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) = \frac{S}{8\pi}(\mu_2 H_2^2 - \mu_1 H_1^2). \qquad (72.5)$$

Сила F положительна при $\mu_1 > \mu_2$ и отрицательна при $\mu_1 < \mu_2$. В обоих случаях эта сила направлена от магнетика с большей к магнетику с меньшей магнитной проницаемостью.

Разберем теперь второй случай, когда магнитное поле параллельно границе раздела магнетиков. Здесь удобнее взять соленоид прямоугольной формы, по боковой поверхности которого циркулирует ток, перпендикулярный к его оси (рис. 186). Пространство внутри соленоида заполнено двумя магнетиками, граничащими друг с другом вдоль плоскости, параллельной одной из боковых граней соленоида. Рассуждения будут такими же, как и в предыдущем случае. Однако теперь удобнее воспользоваться формулой (72.2), т. е. варьировать энергию W_m при постоянном значении поля H. Так как формулы (72.1) и (72.2) отличаются знаками, то вместо выражения (72.4) мы придем к выражению

$$F = S(w_1 - w_2), \qquad (72.6)$$

отличающемуся от (72.4) знаком. Оно может быть истолковано как *разность давлений*, действующих на границу раздела со стороны обоих магнетиков. Величина давления равна плотности магнитной энергии в среде. Так как поле H тангенциально к границе раздела, то в обоих магнетиках его величина одинакова. Поэтому можно написать

$$F = S\frac{H^2}{8\pi}(\mu_1 - \mu_2) = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{B_1^2}{\mu_1} - \frac{B_2^2}{\mu_2}\right). \tag{72.7}$$

Сила F положительна, когда $\mu_1 > \mu_2$, и отрицательна, когда $\mu_1 < \mu_2$. Как и в предыдущем случае, она всегда направлена от магнетика с большей к магнетику с меньшей магнитной проницаемостью.

6. Когда магнитное поле и плотность среды неоднородны и являются непрерывными функциями координат, расчет сил, действующих на среду в магнитном поле, производится аналогично тому, как это было сделано в электростатике (см. § 34). Мы не будем производить этот расчет, а ограничимся приведением окончательного результата. *Механические силы, действующие в магнитном поле, сводятся к натяжению T вдоль поля и к давлению $\mathscr{P}$ в перпендикулярном направлении. Натяжение и давление, отнесенные к единице площади, на которую они действуют, численно одинаковы и равны плотности магнитной энергии в среде*:

$$T = \mathscr{P} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{HB}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu}. \tag{72.8}$$

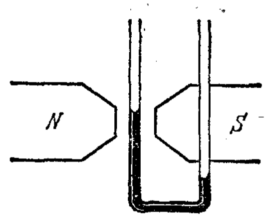

Рис. 187.

7. Поместим одно из колен U-образной трубки с раствором хлористого железа между полюсами электромагнита (рис. 187). При включении тока в обмотке электромагнита жидкость в этом колене поднимается: раствор хлористого железа, как парамагнетик, втягивается в область более сильного магнитного поля. Диамагнетик, наоборот, выталкивается из магнитного поля. Сильным диамагнетизмом обладает висмут. Кусочек висмута, внесенный в пространство между полюсами электромагнита, выталкивается из него, если включить ток в обмотке электромагнита. Так же ведет себя пламя свечи (углекислый газ диамагнитен). Разумеется, все эти явления наблюдаются только в неоднородных полях. В однородном поле результирующая сила, действующая на внесенное в него тело, равна нулю.

Продолговатые тела, имеющие, например, форму палочек, подвешенные на нити, устанавливаются вдоль магнитного поля, если они парамагнитны, и поперек поля, если они диамагнитны. Например, палочка висмута устанавливается поперек магнитного поля. Явление наблюдается и в том случае, когда магнитное поле, в которое вносится магнетик, однородно. Это явление объясняется магнитными натяжениями и давлениями, действующими на концах магнетика. Характер явления зависит только от того, что больше — магнитная проницаемость магнетика или окружающей среды. Ампула с раствором хлористого железа в воздухе устанавливается вдоль магнитного поля. Но если ту же ампулу поместить в более сильный раствор хлористого железа, то она установится перпендикулярно к полю.

§ 73. Термодинамика магнетиков

1. Термодинамика магнетиков аналогична термодинамике диэлектриков, изложенной в § 31 нашего курса. Полученные там результаты могут быть перенесены и в термодинамику магнетиков. Надо только выражение для элементарной работы $-\frac{1}{4\pi} E\, dD$ заменить на $-\frac{1}{4\pi} H\, dB$. Таким путем в тех же предположениях, которые были введены в § 31, получаем основные уравнения термодинамики магнетиков:

$$\delta Q = dU - \frac{1}{4\pi} H\, dB, \tag{73.1}$$

$$dU = T\, dS + \frac{1}{4\pi} H\, dB, \tag{73.2}$$

$$d\Psi = -S\, dT + \frac{1}{4\pi} H\, dB, \tag{73.3}$$

$$d\Phi = -S\, dT - \frac{1}{4\pi} B\, dH, \tag{73.4}$$

$$dI = T\, dS - \frac{1}{4\pi} B\, dH. \tag{73.5}$$

Роль уравнения состояния играет соотношение $B = f(H, T, \tau)$. Используя его, получаем для свободной энергии магнетика

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \int H\, dB + \Psi_0(T, \tau), \tag{73.6}$$

где Ψ_0 — значение свободной энергии при отсутствии магнитного поля. (При интегрировании температура T и плотность магнетика τ должны оставаться постоянными.) В частности, при справедливости соотношения $B = \mu H$

$$\Psi = \frac{\mu H^2}{8\pi} + \Psi_0 = \frac{B^2}{8\pi\mu} + \Psi_0. \tag{73.7}$$

Внутренняя энергия магнетика определяется выражением

$$U = \left(\mu + T\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)\frac{H^2}{8\pi} + U_0(T, \tau) \tag{73.8}$$

или

$$U = \left(1 + \frac{T}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)\frac{B^2}{8\pi\mu} + U_0(T, \tau), \tag{73.9}$$

где производная $\partial\mu/\partial T$ берется при постоянной плотности τ.