Из изложенного видно, что *ларморовское вращение есть одно из проявлений электромагнитной индукции.* То обстоятельство, что электромагнитная индукция должна приводить именно к диамагнетизму, а не к парамагнетизму, проще всего понять, руководствуясь *принципом Ленца.* Действительно, в соответствии с этим принципом магнитное поле $\boldsymbol{B}_{\text{инд}}$, возбуждаемое ларморовским вращением электронов, должно иметь такое направление, чтобы препятствовать всяким изменениям внешнего приложенного поля $\boldsymbol{B}$. Поэтому поле $\boldsymbol{B}_{\text{инд}}$, а с ним и вектор намагничивания среды $\boldsymbol{I}$ должны иметь направление, противоположное направлению внешнего поля $\boldsymbol{B}$. Явление электромагнитной индукции имеет место во всех средах. Поэтому и обусловленный им диамагнетизм есть *универсальное явление,* которое должно проявляться во всех средах. Однако в тех случаях, когда атомы обладают собственными магнитными моментами, диамагнитный эффект перекрывается значительно более сильным парамагнитным эффектом.

§ 77. Объяснение парамагнетизма

1. Парамагнетизм наблюдается у тех веществ, атомы которых обладают магнитными моментами уже в отсутствие внешнего магнитного поля. Пока нет магнитного поля, атомы совершают беспорядочное тепловое движение, а их магнитные моменты ориентированы в пространстве также беспорядочно. В этом случае тело не намагничено. В магнитном поле магнитные моменты атомов ориентируются преимущественно в направлении поля. Появляется намагничивание и обусловленный им парамагнетизм.

Излагаемая ниже теория парамагнетизма относится к парамагнитным газам, взаимодействие между атомами которых слабое. Качественно результаты этой теории применимы также к твердым и жидким парамагнетикам, электронные оболочки атомов или ионов которых могут более или менее свободно вращаться вокруг атомных ядер. Это имеет место, например, тогда, когда электронные оболочки обладают сферической симметрией. Таковы электронные оболочки атомов благородных газов или ионов с таким же числом электронов, как у благородных газов.

2. Поместим изолированный атом в постоянное магнитное поле $\boldsymbol{B}$. Отвлечемся от наличия спинов, предполагая, что все спины электронной оболочки скомпенсированы. Пусть $\boldsymbol{v}$ — скорость какого-либо электрона атома до внесения в магнитное поле. Тогда, согласно теореме Лармора, в магнитном поле скорость того же электрона будет $\boldsymbol{v}+[\boldsymbol{\Omega r}]$, а его кинетическая энергия $\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}+[\boldsymbol{\Omega r}])^2$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — ларморовская частота. Если пренебречь квадратами величины $\boldsymbol{\Omega}$, то для приращения кинетической энергии электрона можно написать $m(\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega r}])$ или $m([\boldsymbol{rv}]\boldsymbol{\Omega})$. Просуммировав по всем электронам оболочки, находим приращение $\mathscr{E}$ кинетической энергии атома в магнитном поле: $\mathscr{E} = (\boldsymbol{L\Omega})$, где $\boldsymbol{L}$ — момент количества движения электронной оболочки. С помощью формул (75.1) и (76.1) это выражение приводится к виду

$$\mathscr{E} = -(\mathfrak{M}\boldsymbol{B}). \tag{77.1}$$

Такое же изменение энергии (но уже потенциальной) мы получили бы для магнитного диполя с магнитным моментом $\mathfrak{M}$ при внесении его в магнитное поле. Этого и следовало ожидать, так как, согласно теореме Ампера, во внешнем магнитном поле элементарный виток с током (например, вращающийся по орбите электрон) испытывает те же силы, что и магнитный диполь. Поэтому формула (77.1) для приращения энергии справедлива и в том случае, когда магнитный момент $\mathfrak{M}$ обусловлен спинами, а не орбитальным движением электронов. Вообще, формула (77.1) верна независимо от происхождения магнитного момента атома $\mathfrak{M}$, как это можно подтвердить независимым расчетом (см. пункт 8).

3. На основании изложенного ясно, что классическая теория парамагнетизма газов по существу не должна отличаться от соответствующей теории Дебая поляризации газообразных диэлектриков с полярными молекулами, которая была изложена в § 36. Теория парамагнетизма была создана Ланжевеном раньше теории диэлектриков Дебая. Последняя просто копирует теорию Ланжевена. Как видно из формулы (77.1), энергия атома больше, если его магнитный момент ориентирован против магнитного поля, и меньше, если он ориентирован по полю. Поэтому в состоянии статистического равновесия больше магнитных моментов будет ориентировано по полю, чем в противоположном направлении, т. е. будет наблюдаться парамагнетизм. Если выполнено условие

$$\frac{\mathfrak{M}B}{kT} \ll 1, \tag{77.2}$$

то, по аналогии с формулой (36.5), в классической теории можно написать

$$\boldsymbol{I} = \frac{n\mathfrak{M}^2}{3kT}\boldsymbol{B}. \tag{77.3}$$

Отсюда, используя соотношения $\boldsymbol{I} = \varkappa \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B} = (1 + 4\pi\varkappa)\boldsymbol{H}$, получим

$$\frac{\varkappa}{1+4\pi\varkappa} = \frac{n\mathfrak{M}^2}{3kT}. \tag{77.4}$$

Этой формулой и определяется магнитная восприимчивость парамагнетика. Впрочем, магнитная восприимчивость неферромагнитных тел настолько мала, что в предыдущей формуле, как это обычно делается, величиной $4\pi\varkappa$ можно пренебречь по сравнению с единицей [1]). Тогда

$$\varkappa = \frac{n\mathfrak{M}^2}{3kT}. \tag{77.5}$$

4. Обобщим теперь формулы (77.3) и (77.5) на случай сильных магнитных полей или низких температур, когда условие (77.2) не соблюдается. Это было сделано также Ланжевеном. Однако в классической теории Ланжевена не учитывается квантование магнитных моментов атомов, что существенно в области низких температур. Для учета квантования надо считать магнитный момент атома $\mathfrak{M}$ кратным магнетону Бора $\mathfrak{M}_B$ и принять во внимание все ориентации его, допускаемые правилами квантования. Примем, что магнитный момент атома $\mathfrak{M}$ спиновый и равен одному магнетону Бора. Такое предположение не затрагивает ничего существенного, обусловленного квантованием, но сильно упрощает расчет, так как в этом случае в магнитном поле возможны только две ориентации атома: параллельная и антипараллельная. В параллельной ориентации проекция магнитного момента на направление магнитного поля равна $+\mathfrak{M}_B$, в антипараллельной $-\mathfrak{M}_B$. (В дальнейшем значок B будем опускать.) Этим ориентациям соответствуют энергии $-\mathfrak{M}B$ и $+\mathfrak{M}B$. Согласно распределению Больцмана числа атомов (в единице объема) с параллельной и антипараллельной ориентациями будут равны соответственно

$$n_1 = Ce^x, \qquad n_2 = Ce^{-x},$$

где введено обозначение

$$x = \frac{\mathfrak{M}B}{kT}. \tag{77.6}$$

Нормировочная постоянная C определится из условия $n_1 + n_2 = n$, где n — полное число атомов в единице объема. Это дает $C(e^x + e^{-x}) = n$. Для намагничивания получаем $I = (n_1 - n_2)\mathfrak{M}$, откуда

$$I = n\mathfrak{M}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = n\mathfrak{M}\,\mathrm{th}\,x. \tag{77.7}$$

5. Прежде чем исследовать полученную формулу, заметим, что в случае, когда магнитный момент атома больше одного магнетона Бора, расчет проводится по той же схеме. Увеличивается только число возможных ориентаций и значения проекций маг-

---

[1]) Было бы непоследовательно учитывать различие между $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ и пренебрегать, как мы всюду делали в этом параграфе, различием между средним макроскопическим полем $\boldsymbol{B}$ и полем $\boldsymbol{B}'$, действующим на атом парамагнетика, между квадратом среднего поля $\boldsymbol{B}$ и средним квадратом микроскопического поля и т. п. Все эти различия одного и того же порядка.

нитных моментов атомов на направление магнитного поля. Во всех случаях результат записывается в виде

$$I = n\mathfrak{M}L(x), \tag{77.8}$$

где $L(x)$ называется *функцией Ланжевена*. В разобранном нами случае функция Ланжевена равна $\operatorname{th} x$ и обозначается через $L_{1/2}(x)$, поскольку механический момент атома (в единицах $\hbar$) равен 1/2. В других случаях вид функции $L(x)$ изменяется, но ее общий характер сохраняется. В классическом пределе, когда квантования нет, т. е. допустимы все ориентации магнитных моментов, функцию Ланжевена обозначают через $L_\infty(x)$. Она равна

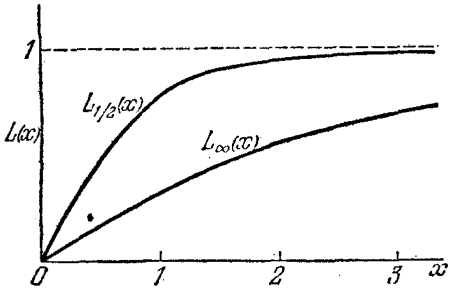

Рис. 193.

$$L_\infty(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \tag{77.9}$$

(см. задачу к этому параграфу). Этот результат был получен самим Ланжевеном.

6. Графики функций Ланжевена $L_{1/2}(x)$ и $L_\infty(x)$ приведены на рис. 193. При малых x

$$L_{1/2}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \ldots, \qquad L_\infty(x) = \frac{1}{3}x + \ldots$$

В соответствии с этим в слабых полях ($x \ll 1$) $\boldsymbol{I}$ зависит от $\boldsymbol{B}$ линейно. По формуле (77.7) получается

$$\boldsymbol{I} = \frac{n\mathfrak{M}^2}{kT}\boldsymbol{B}, \tag{77.10}$$

а по формуле (77.9) — классический результат (77.3), т. е. величина втрое меньшая. Магнитные моменты $\mathfrak{M}$ определяются *внутренним строением атома*. Тепловое движение недостаточно интенсивно, чтобы изменить их. Поэтому, как видно из формулы (77.10) или (77.3), *магнитная восприимчивость парамагнитных газов должна меняться обратно пропорционально абсолютной температуре T*. Такая закономерность была обнаружена экспериментально П. Кюри еще до разработки соответствующей теории и носит название *закона Кюри*. Закон Кюри хорошо согласуется с опытом для газообразных парамагнетиков, а также для ряда твердых парамагнетиков (например, солей редких земель). С другой стороны, для многих жидких и твердых парамагнетиков изложенная элементарная теория недостаточна, поскольку она допускает свободное вращение электронных оболочек атомов вокруг направления магнитного поля. Впрочем, и в тех случаях, когда это допущение справедливо, в сильных полях ($x \gg 1$) и при очень низких температурах (порядка нескольких кельвинов) должны наблюдаться отклонения не только от закона Кюри, но и от самой пропорциональности между величинами I и B.

7. В сильных полях ($x \gg 1$) обе функции $L_{1/2}(x)$ и $L_\infty(x)$ асимптотически стремятся к единице. Этому соответствует *насыщение намагничивания* $I = n\mathfrak{M}$, когда все магнитные моменты устанавливаются параллельно магнитному полю. Однако классическая функция $L_\infty(x)$, как и следовало ожидать, не удовлетворяет тепловой теореме Нернста (см. т. II, § 84), тогда как функция $L_{1/2}(x)$ согласуется с ней. В самом деле, в отсутствие квантования справедлива классическая теорема о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы. Согласно этой теореме вращательные степени свободы атома должны быть возбуждены — на каждую из них придется кинетическая энергия $^1/_2kT$ и теплоемкость $^1/_2k$, не зависящая от температуры. При абсолютном нуле получилось бы конечное значение теплоемкости, что противоречит теореме Нернста. Другое противоречие с теоремой Нернста заключается в следующем. Из формул (73.3) и (73.4) следует

$$\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_B, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_H.$$

Согласно теореме Нернста все процессы при абсолютном нуле температур не сопровождаются изменениями энтропии. Поэтому левые, а с ними и правые части полученных соотношений при $T = 0$ должны обращаться в нуль:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_B = \left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_H = 0.$$

Если воспользоваться формулой $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{I}$, то полученные результаты можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_B = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_H = 0. \tag{77.11}$$

Но классическая формула (77.9) не согласуется с этими соотношениями. Действительно, при $x \gg 1$ справедлива асимптотика $L_\infty(x) = 1 - 1/x$ и, следовательно,

$$I = n\mathfrak{M}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = n\mathfrak{M} - \frac{nkT}{B}.$$

Из нее следует $(\partial I/\partial T)_B = nk/B$, т. е. при абсолютном нуле производная $(\partial I/\partial T)_B$ не обращается в нуль. Но если взять формулу (77.7), то можно воспользоваться асимптотикой $L_{1/2}(x) = 1 - 2e^{-2x}$, и, следовательно, $I = n\mathfrak{M}(1 - 2e^{-2x})$. Отсюда видно, что при $x \to \infty$ I стремится к постоянному значению $n\mathfrak{M}$ (насыщение), а производная $\partial I/\partial x$ — к нулю. Значит, квантовая формула (77.7) согласуется с теоремой Нернста.

8. Чтобы завершить излагаемую теорию, необходимо еще объяснить, *как возникает намагничивание парамагнетика.* Как показано в предыдущем параграфе, в магнитном поле атом в целом вращается с ларморовской частотой, т. е. совершает регулярную прецессию с той же частотой вокруг направления магнитного поля. При такой прецессии угол между магнитным моментом $\mathfrak{M}$ и полем B остается неизменным. Остается неизменной и проекция вектора $\mathfrak{M}$ на направление магнитного поля. Ясно, что прецессия сама по себе не может привести к намагничиванию парамагнетика. *Намагничивание возникает в результате взаимодействий атомов между собой.* Схематизируя, будем рассматривать эти взаимодействия как столкновения, а атом — как волчок с механическим моментом L и магнитным моментом $\mathfrak{M} = \Gamma L$, где Γ — гиромагнитное отношение. Ради конкретности на рис. 194 векторы L и $\mathfrak{M}$ будем считать направленными в одну сторону, хотя все наши результаты останутся справедливыми и в том случае, когда эти направления противоположны. В магнитном поле на атом действует момент сил $M = [\mathfrak{M}B]$, под действием которого и происходит прецессия. Угловая скорость прецессии Ω найдется из уравнения моментов $\dot{L} = M$. Подставив в него $\dot{L} = [\Omega L]$, получим $[\Omega L] = \Gamma[LB]$, откуда

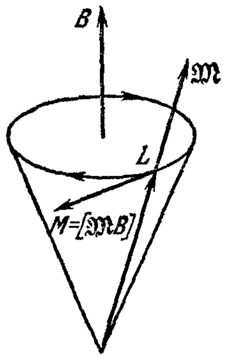

Рис. 194.

$$\Omega = -\Gamma B. \qquad (77.12)$$

Если момент L создается орбитальным движением электронов, то $\Gamma = -e/(2mc)$ и, следовательно, $\Omega = eB/(2mc)$, т. е. прецессия происходит с ларморовской частотой. Это показывает, что наша классическая модель приводит к правильному результату. Если же момент L спиновый, то $\Gamma = -e/(mc)$ и угловая скорость прецессии будет вдвое больше. В остальных случаях явление становится более сложным, но его разбор будет приведен в V томе нашего курса — в атомной физике.

Учтем теперь столкновения. Если атом получает толчок в направлении прецессионного вращения, то соответствующий ему момент сил вызовет прецессию вокруг оси, перпендикулярной к магнитному полю. С помощью уравнения моментов нетрудно убедиться, что в результате такого толчка угол между векторами $\mathfrak{M}$ и B увеличится. Если же толчок произведен в направлении, противоположном прецессионному вращению, то этот угол уменьшится. Толчки первого типа размагничивают, а второго — намагничивают парамагнетик. Однако эффект намагничивания будет преобладать над эффектом размагничивания, так как толчки против прецессионного вращения в среднем сильнее толчков противоположного направления, подобно тому как сила сопротивления, испытываемая человеком, будет больше, когда он бежит против ветра, а не по ветру. Мы видим, что *магнитное поле только поддерживает, а не создает намагничивание парамагнетика. Намагничивание создается и устанавливается в результате столкновений атомов между собой.*

9. Некоторые металлы, например щелочные, обладают парамагнетизмом, но не подчиняются закону Кюри. Магнитная восприимчивость таких металлов в широких пределах не зависит от температуры. Объяснение этого факта было дано Паули (1900—1958) в 1927 г. Он предположил, что парамагнетизм в этих случаях обусловлен не магнитными моментами ионов кристаллической решетки, а *спиновыми магнитными моментами электронов проводимости.* Рассматривая эти электроны как газ, подчиняющийся статистике Ферми—Дирака (см. т. II, § 82), Паули рассчитал его магнитную восприимчивость. Этот расчет будет приведен в § 99. Здесь же заметим, что независимость магнитной восприимчивости электронного газа в металлах от температуры является *следствием теоремы Нернста.* Действительно, при обычных температурах электронный газ в металлах находится в состоянии *вырождения.* Это означает, что для него такие температуры следует считать *близкими к абсолютному нулю,* и можно воспользоваться теоремой Нернста. Из формулы (73.4) следует

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_H=\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T.$$

Правая часть этого соотношения обращается в нуль в силу теоремы Нернста, а левая равна $\frac{H}{4\pi}\frac{d\mu}{dT}$. Здесь значок H в производной $\partial\mu/\partial T$ опущен, а сама производная написана в виде $d\mu/dT$, так как μ от H не зависит. Таким образом, $\frac{d\mu}{dT}=4\pi\frac{d\varkappa}{\partial T}=0$.

ЗАДАЧА

Получить выражение (77.9) для классической функции Ланжевена.

Решение. Число атомов в единице объема, магнитные моменты которых направлены в пределах телесного угла $d\Omega=2\pi\sin\vartheta\,d\vartheta$, определяется формулой Больцмана

$$dn=Ce^{\frac{\mathfrak{M}B}{kT}\cos\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta=Ce^{x\cos\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta,$$

где ϑ — угол между направлениями магнитного момента $\mathfrak{M}$ и магнитного поля $\boldsymbol{B}$, а постоянная нормировки C определяется условием $\int dn=n$. В намагничивание среды эти атомы вносят величину $dI=\mathfrak{M}\,dn\cos\vartheta$. Подставив сюда выражение для dn и интегрируя, получим

$$I = n\mathfrak{M} \frac{\int\limits_0^\pi e^{x\cos\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{\int\limits_0^\pi e^{x\cos\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta} = n\mathfrak{M}\left(\operatorname{cth} x - \frac{1}{x}\right),$$

откуда и следует формула (77.9).

§ 78. Гиромагнитные явления

1. Подвесим парамагнитное или ферромагнитное тело на нити, вокруг которой оно может вращаться. При намагничивании в магнитном поле атомы тела и их магнитные моменты поворачиваются, ориентируясь преимущественно в направлении поля. С магнитным моментом атома $\mathfrak{M}$ связан момент количества движения электронной оболочки $\mathfrak{M}/\Gamma$, где Γ — гиромагнитное отношение. Магнитный момент тела равен $V\boldsymbol{I}$, где V — объем тела, а $\boldsymbol{I}$ — вектор намагничивания. Поэтому в результате намагничивания момент количества движения электронных оболочек тела увеличивается на $\boldsymbol{L}_{эл} = V\boldsymbol{I}/\Gamma$. Но повороты атомов и магнитных моментов осуществляются под действием столкновений, т. е. *внутренних сил*, которые не могут изменить общий момент количества движения тела. Отсюда следует, что кристаллическая решетка тела должна получить такой же момент количества движения, но противоположного знака, т. е. $\boldsymbol{L}_{реш} = -V\boldsymbol{I}/\Gamma$. Если до намагничивания тело находилось в состоянии покоя, то в результате намагничивания оно должно прийти во вращение. Если Θ — момент инерции тела, то угловая скорость вращения $\boldsymbol{\omega}$ определяется уравнением

$$\Theta\boldsymbol{\omega} = -\frac{V}{\Gamma}\boldsymbol{I}, \tag{78.1}$$

а само вращение называется *магнитомеханическим явлением*. Оно вполне аналогично вращению скамьи Жуковского, когда сидящий на ней человек поворачивает ось раскрученного велосипедного колеса, которое он держит в руках (см. т. I, § 34, пункт 7). Роль велосипедного колеса играют электронные оболочки атомов, роль скамьи Жуковского и сидящего на ней человека — кристаллическая решетка тела.

2. Для оценки эффекта предположим, что тело массы M имеет форму цилиндрика радиуса r и намагничивается до насыщения. Если магнитный момент атома равен одному магнетону Бора $\mathfrak{M}_B = e\hbar/(2mc)$, то магнитный момент тела будет $VI = MN\mathfrak{M}_B/A$, где N — число Авогадро, а A — атомный вес. Допустим, что магнитный момент атома обусловлен орбитальным движением электрона и, следовательно, $\Gamma = -e/(2mc)$. Подставляя эти данные