ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

* *

§ 81. Ток смещения

1. Основные уравнения электромагнитного поля в неподвижных средах, применимые не только к постоянным, но и к переменным электромагнитным полям, были установлены Максвеллом. К уравнениям Максвелла можно прийти путем последовательного обобщения опытных фактов. Надо решить, какие из полученных ранее уравнений могут быть сохранены, какие должны быть отброшены и какие надо обобщить. Есть один руководящий принцип, который позволяет продвинуться в этом направлении. Следует исключить из числа основных такие уравнения, в основе которых лежит представление о непосредственном действии на расстоянии. К ним относятся законы Кулона, Био и Савара и пр. Эти законы несовместимы с экспериментально подтвержденным представлением о конечной скорости распространения взаимодействий, а потому не могут оставаться верными во всех случаях. Можно сохранить только такие уравнения, которые не противоречат представлениям теории поля. Так мы и поступали во всем предшествовавшем изложении. Мы выдвинули в качестве гипотезы, что теорема Гаусса (13.4), уравнение (58.1) и закон электромагнитной индукции (66.1) являются общими законами электродинамики. То обстоятельство, что они удовлетворяют требованиям теории поля, следует из того, что их можно представить в дифференциальной форме (13.5), (58.2) и (66.4). К основным уравнениям электродинамики мы присоединим и закон сохранения электрического заряда. В дифференциальной форме он имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{81.1}$$

Если электромагнитное поле стационарно, то это уравнение переходит в

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{81.2}$$

2. Теорема о циркуляции

$$\oint\limits_L \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} \mathscr{I} \tag{81.3}$$

также может быть преобразована в дифференциальную форму:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \tag{81.4}$$

а потому удовлетворяет требованиям теории поля. Однако она не может входить в число основных уравнений электродинамики. Действительно, дивергенция всякого ротора тождественно равна нулю. Поэтому, взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (81.4), получим $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$. Но это соотношение справедливо только для стационарных токов. В общем случае оно противоречит уравнению (81.1). Сомневаться в справедливости уравнения (81.1) нет оснований, так как оно выражает *закон сохранения электрического заряда*. Отсюда следует, что уравнения (81.3) и (81.4) могут быть верны только для стационарных токов. Для переменных электромагнитных полей они должны быть обобщены.

Чтобы прийти к обобщенным уравнениям, воспользуемся следующим наводящим рассуждением. Поскольку дивергенция левой части уравнения (81.4) тождественно равна нулю, в правой части этого уравнения должен стоять вектор, дивергенция которого также всегда равна нулю. В случае стационарных электромагнитных полей этот вектор должен переходить в $\boldsymbol{j}$. Легко указать вектор, удовлетворяющий этим условиям. Дифференцируя по времени соотношение $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho$, получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{D}} = 0,$$

или ввиду уравнения (81.1)

$$\operatorname{div} \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi} \dot{\boldsymbol{D}} \right) = 0. \tag{81.5}$$

Величину

$$\boldsymbol{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \dot{\boldsymbol{D}} \tag{81.6}$$

Максвелл назвал *током* (точнее, *плотностью тока*) *смещения*, а сумму $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\text{см}}$ — *полным током*. Таким образом,

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\text{см}}) = 0, \tag{81.7}$$

т. е. *полный ток всегда соленоидален*. Поэтому противоречие с уравнением (81.1) устранится, если в уравнении (81.4) ток проводимости $\boldsymbol{j}$ заменить полным током, т. е. написать

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\text{см}}). \tag{81.8}$$

Так и поступил Максвелл.

Приведенные рассуждения ни в какой мере не могут служить доказательством уравнения (81.8). На них следует смотреть только как на один из бесконечного множества способов устранения математического противоречия между уравнениями (81.1) и (81.4). А что таких способов бесконечно много, видно уже из того, что не возникнет новых математических противоречий, если в правой части уравнения (81.8) добавить произвольный вектор, дивергенция которого равна нулю. Настоящим доказательством уравнения (81.8) могут служить только опытные факты, подтверждающие это уравнение.

3. К необходимости обобщения уравнений (81.3) и (81.4) можно прийти также с помощью других соображений. Приведем два примера.

Пример 1. Пусть в неограниченной однородной среде помещен металлический шар, которому сообщен электрический заряд Q (рис. 206). Если среда проводящая, то появятся электрические токи, текущие в радиальных направлениях. Они будут возбуждать магнитное поле. При попытке указать его направление возникает следующая трудность. Вектор $\boldsymbol{B}$ не может иметь радиальной составляющей. Система сферически симметрична. Если бы радиальная составляющая вектора $\boldsymbol{B}$ существовала, то она была бы одной и той же во всех точках всякой сферы S, концентрической с поверхностью шара. Радиальная составляющая $\boldsymbol{B}$ на сфере S была бы всюду направлена либо от центра, либо к центру шара. В обоих случаях поток вектора $\boldsymbol{B}$ через сферу S был бы отличен от нуля, что противоречит уравнению (58.1). Следовательно, вектор $\boldsymbol{B}$ должен быть перпендикулярен к радиусу, проведенному из центра шара к рассматриваемой точке. А это также невозможно, так как все направления, перпендикулярные к радиусу, ничем не выделены — все они совершенно равноправны. Единственная возможность, допускаемая симметрией шара, состоит в том, что векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ всюду должны равняться нулю. Но в таком случае должен равняться нулю и ток $\boldsymbol{j}$, как это непосредственно следует из уравнения (81.4). Значит, уравнение (81.4) и эквивалентное ему уравнение (81.3) в рассматриваемом случае не могут быть верными.

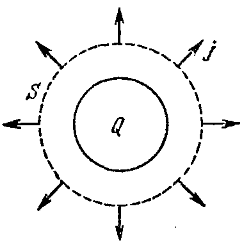

Рис. 206.

Для устранения возникшего противоречия необходимо допустить, что магнитные поля возбуждаются не только токами проводимости, а еще чем-то. К току проводимости $\mathscr{I}$ надо что-то добавить, чтобы уничтожить возбуждаемое им магнитное поле. Эта добавка и есть ток смещения. Его величина $\mathscr{I}_{см}$ определится из условия $\mathscr{I} + \mathscr{I}_{см} = 0$. Полный ток проводимости, текущий от заряженного шара, связан с зарядом Q соотношением $\mathscr{I} = -dQ/dt$, а потому $\mathscr{I}_{см} = dQ/dt$. По закону Кулона $Q = r^2D$. Дифференцируя это выражение и разделив результат на поверхность сферы $4\pi r^2$, найдем плотность тока смещения:

$$j_{\text{см}} = \frac{\dot{Q}}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi}\dot{D}.$$

Это выражение совпадает с (81.6).

4. Пример 2. Соединим проводом обкладки плоского заряженного конденсатора (рис. 207). По проводу потечет электрический ток. Допущение, что в этом случае применима формула (81.3), снова приводит к трудностям. Циркуляция вектора $\boldsymbol{H}$, стоящего в левой части уравнения (81.3), зависит только от формы и расположения контура L. Она — величина вполне определенная. Между тем ток $\mathscr{I}$, стоящий в правой части того же уравнения, таким свойством не обладает. Для определения $\mathscr{I}$ надо мысленно натянуть на контур L какую-то поверхность S и найти пронизывающий ее ток. Однако сила переменного тока может меняться вдоль провода. В этих случаях величина $\mathscr{I}$ будет зависеть от того, в каком месте поверхность S пересекается с проводом. С особой отчетливостью указанная неопределенность проявится, если поверхность S провести между обкладками конденсатора, нигде не пересекая провода. Тогда $\mathscr{I} = 0$. Для устранения неопределенности к току $\mathscr{I}$ в уравнении (81.3) надо добавить какое-то слагаемое $\mathscr{I}_{\text{см}}$, чтобы сумма $\mathscr{I} + \mathscr{I}_{\text{см}}$ не зависела от выбора вспомогательной поверхности S. Это слагаемое и есть ток смещения.

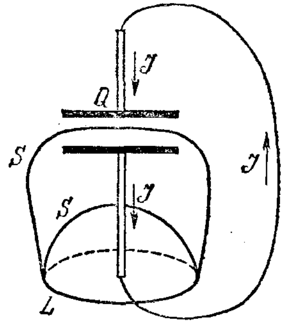

Рис. 207.

Независимость полного тока $\mathscr{I} + \mathscr{I}_{\text{см}}$ от формы поверхности, натянутой на один и тот же контур L, эквивалентна утверждению, что полный ток через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю. Токи, удовлетворяющие этому условию, не совсем удачно называются *замкнутыми*. Замкнутость токов не следует понимать в смысле замкнутости линий тока. Если линии тока замкнуты, то и сами токи также замкнуты. Обратное справедливо не всегда: линии тока в случае замкнутых токов не обязательно должны быть сами замкнутыми. Таким образом, формальное содержание гипотезы Максвелла сводится к утверждению, что *полные токи всегда замкнуты*. Токи проводимости, если они не замкнуты, замыкаются токами смещения.

Из условия замкнутости полного тока можно получить и выражения для тока смещения и его плотности. Обратимся снова к примеру с конденсатором. Идеализируя систему, можно сказать, что по проводу течет только ток проводимости, а через конденсатор — только ток смещения. Ток смещения дополняет ток проводимости до замкнутого тока. Поэтому ток проводимости в проводе должен быть равен току смещения в конденсаторе: $\mathscr{I}_{\text{см}} = \dot{Q}$, где Q — заряд на той пластине конденсатора, к которой течет ток. Очевидно, $Q = S\sigma = SD/(4\pi)$. Дифференцируя по времени и разделив на S, снова получаем

$$\boldsymbol{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\dot{\boldsymbol{D}}.$$

Таким образом, тремя различными способами мы приходим к одному и тому же выражению для плотности тока смещения.

5. Токи смещения существуют только там, где меняется электрическое поле (точнее, электрическая индукция $\boldsymbol{D}$). Поэтому физическое содержание гипотезы Максвелла о токах смещения сводится к утверждению, что *переменные электрические поля являются источниками магнитных полей.* Это открытие принадлежит всецело Максвеллу. Оно вполне аналогично открытию электромагнитной индукции, согласно которому переменные магнитные поля возбуждают поля электрические.

6. Ток смещения в диэлектрике состоит из двух существенно различных слагаемых. По определению вектора электрической индукции $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$, а потому

$$\boldsymbol{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\dot{\boldsymbol{E}} + \dot{\boldsymbol{P}}. \tag{81.9}$$

Величина $\dot{\boldsymbol{P}}$ называется *плотностью тока поляризации*. Вектор поляризации определяется выражением $\boldsymbol{P} = \sum e_i\boldsymbol{r}_i$. Суммирование ведется по всем связанным зарядам, находящимся в единице объема вещества. Дифференцируя это выражение по времени, получим

$$\boldsymbol{j}_{\text{пол}} \equiv \dot{\boldsymbol{P}} = \sum e_i\boldsymbol{v}_i,$$

где $\boldsymbol{v}_i$ — скорость движения i-го заряда. Таким образом, *ток поляризации есть электрический ток, обусловленный движением связанных зарядов.* Последние принципиально ничем не отличаются от свободных зарядов. Поэтому нет ничего неожиданного в том, что токи поляризации возбуждают магнитное поле. Принципиально новое содержится в утверждении, что и вторая часть тока смещения $\frac{1}{4\pi}\dot{\boldsymbol{E}}$, которая не связана ни с каким движением зарядов, а обусловлена только изменениями электрического поля во времени, также является источником магнитного поля. *Даже в вакууме всякое изменение электрического поля во времени возбуждает в окружающем пространстве магнитное поле.* Открытие этого обстоятельства — наиболее существенный и решающий шаг, сделанный Максвеллом при построении своей электродинамики.

ЗАДАЧИ

1. Пространство между обкладками длинного цилиндрического конденсатора заполнено однородным диэлектриком со слабой электропроводностью. Когда конденсатор заряжен, в диэлектрике от одной обкладки к другой течет электрический ток. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженность магнитного поля между обкладками.

Ответ. $H=0$.

2. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор медленно разряжается объемными токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой электропроводности. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить напряженность магнитного поля внутри конденсатора.

Решение. Если σ — поверхностная плотность электричества на положительной обкладке, то $D = 4\pi\sigma$ и, следовательно, $j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\dot{D} = \dot{\sigma}$. По закону сохранения электрического заряда $j = -\dot{\sigma}$. Следовательно, $\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}} = \vec{j}_{\text{полн}} = 0$. Магнитное поле в конденсаторе равно нулю.

3. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиуса R, пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая краевыми эффектами, вычислить мгновенное значение напряженности магнитного поля внутри конденсатора (в зависимости от расстояния r до его оси), если сила тока в электрической искре в рассматриваемый момент времени равна $\mathscr{I}$.

Решение. В силу симметрии магнитные силовые линии будут коаксиальными окружностями с общей осью, совпадающей с осью конденсатора. Поле H найдется по формуле

$$\oint H\,dl = 2\pi rH = \frac{4\pi}{c}(\mathscr{I} + i_{\text{см}}),$$

где $i_{\text{см}} = \mathscr{I}r^2/R^2$ — ток смещения, пронизывающий круг радиуса r. В результате получим

$$H = \frac{2\mathscr{I}}{cr}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

4. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых металлических дисков, пространство между которыми заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между внутренними поверхностями дисков равно d. Между обкладками конденсатора поддерживается переменное напряжение $V = V_0 \sin \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, найти магнитное поле в пространстве между обкладками конденсатора.

Ответ. $H = \frac{\varepsilon\omega r}{2cd} V_0 \cos \omega t$, где r — расстояние от оси конденсатора. Магнитные силовые линии имеют форму коаксиальных окружностей с общей осью, совпадающей с осью конденсатора.

§ 82. Система уравнений Максвелла

1. Дополнив основные факты из области электромагнетизма установлением магнитных действий токов смещения, Максвелл смог написать *систему фундаментальных уравнений электродинамики*. Таких уравнений четыре. В интегральной форме они имеют