ЗАДАЧИ

1. Пространство между обкладками длинного цилиндрического конденсатора заполнено однородным диэлектриком со слабой электропроводностью. Когда конденсатор заряжен, в диэлектрике от одной обкладки к другой течет электрический ток. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженность магнитного поля между обкладками.

Ответ. $H = 0$.

2. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор медленно разряжается объемными токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой электропроводности. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить напряженность магнитного поля внутри конденсатора.

Решение. Если σ — поверхностная плотность электричества на положительной обкладке, то $D = 4\pi\sigma$ и, следовательно, $j_{см} = \frac{1}{4\pi}\dot{D} = \dot{\sigma}$. По закону сохранения электрического заряда $j = -\dot{\sigma}$. Следовательно, $\mathbf{j} + \mathbf{j}_{см} = \mathbf{j}_{полн} = 0$. Магнитное поле в конденсаторе равно нулю.

3. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиуса R, пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая краевыми эффектами, вычислить мгновенное значение напряженности магнитного поля внутри конденсатора (в зависимости от расстояния r до его оси), если сила тока в электрической искре в рассматриваемый момент времени равна $\mathcal{I}$.

Решение. В силу симметрии магнитные силовые линии будут коаксиальными окружностями с общей осью, совпадающей с осью конденсатора. Поле H найдется по формуле

$$\oint H\,dl = 2\pi r H = \frac{4\pi}{c}(\mathcal{I} + i_{см}),$$

где $i_{см} = \mathcal{I} r^2/R^2$ — ток смещения, пронизывающий круг радиуса r. В результате получим

$$H = \frac{2\mathcal{I}}{cr}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

4. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых металлических дисков, пространство между которыми заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между внутренними поверхностями дисков равно d. Между обкладками конденсатора поддерживается переменное напряжение $V = V_0 \sin \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, найти магнитное поле в пространстве между обкладками конденсатора.

Ответ. $H = \frac{\varepsilon\omega r}{2cd} V_0 \cos \omega t$, где r — расстояние от оси конденсатора. Магнитные силовые линии имеют форму коаксиальных окружностей с общей осью, совпадающей с осью конденсатора.

§ 82. Система уравнений Максвелла

1. Дополнив основные факты из области электромагнетизма установлением магнитных действий токов смещения, Максвелл смог написать *систему фундаментальных уравнений электродинамики*. Таких уравнений четыре. В интегральной форме они имеют

вид

$$\oint_L \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) d\boldsymbol{S}, \tag{82.1}$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\, d\boldsymbol{S}, \tag{82.2}$$

$$\oint_S (\boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S}) = 4\pi \int \rho\, dV, \tag{82.3}$$

$$\oint_S (\boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}) = 0. \tag{82.4}$$

В дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{82.1a}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{82.2a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{82.3a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{82.4a}$$

В число фундаментальных не включено уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда, так как это уравнение является следствием уравнений (82.1) и (82.3). Действительно, возьмем бесконечно малый контур L, натянем на него произвольную конечную поверхность S, а затем стянем этот контур в точку, оставляя поверхность S конечной. В пределе циркуляция $\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}$ обратится в нуль, S превратится в замкнутую поверхность, а уравнение (82.1) перейдет в

$$\oint \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi}\dot{\boldsymbol{D}}\right) d\boldsymbol{S} = 0.$$

Интеграл $\oint (\boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S})$ есть ток $\mathscr{I}$, вытекающий из объема V, ограниченного поверхностью S. Кроме того, записав уравнение (82.3) в виде

$$\oint (\boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S}) = 4\pi q$$

и дифференцируя его по времени, получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\oint (\dot{\boldsymbol{D}}\, d\boldsymbol{S}).$$

В результате получится уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathscr{I},$$

выражающее закон сохранения электрического заряда. Тот же закон можно получить из дифференциальных уравнений (82.1a) и (82.3а). Достаточно взять дивергенцию от обеих частей уравнения (82.2а) и воспользоваться уравнением (82.3а). Тогда получится уравнение (81.1).

Уравнения Максвелла показывают, что *источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо магнитные поля, меняющиеся во времени. Магнитные же поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.* Уравнения не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но, насколько известно в настоящее время, нет зарядов магнитных. Стремление достигнуть симметрии уравнений электродинамики заставило Дирака выдвинуть гипотезу о существовании магнитных зарядов — *единичных магнитных полюсов*, или *монополей*. Логических возражений против такой гипотезы нет. Если бы она оправдалась, то потребовалось бы обобщение уравнений Максвелла. К источникам магнитного поля добавились бы магнитные заряды, а к источникам электрического поля — магнитные токи, обусловленные движением таких зарядов. Справедливость же самих уравнений Максвелла была бы ограничена теми областями пространства, в которых нет магнитных зарядов и магнитных токов. Однако многочисленные попытки экспериментально обнаружить магнитные монополи не привели к положительному результату.

2. Уравнения Максвелла в интегральной форме справедливы и в тех случаях, когда существуют *поверхности разрыва*, на которых свойства среды или напряженности электрического и магнитного полей меняются скачкообразно. Поэтому в этой форме уравнения Максвелла обладают большей общностью, чем в дифференциальной форме, которая предполагает, что все величины в пространстве и во времени меняются непрерывно. Можно, однако, достигнуть полной математической эквивалентности обеих форм уравнений Максвелла. Для этого надо дифференциальные уравнения дополнить *граничными условиями*, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред. Эти условия содержатся в интегральной форме уравнений Максвелла. Они были выведены в соответствующих местах курса и имеют вид

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \tag{82.5}$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \tag{82.6}$$

$$E_{1t} = E_{2t}, \tag{82.7}$$

$$[\mathbf{n}\mathbf{H}_2] - [\mathbf{n}\mathbf{H}_1] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}. \tag{82.8}$$

Здесь σ — поверхностная плотность электрических зарядов, а $\mathbf{i}$ — поверхностная плотность тока проводимости на рассматриваемой границе раздела. В частном случае, когда поверхностных токов нет, последнее условие переходит в

$$H_{1t}=H_{2t}. \tag{82.9}$$

Подчеркнем еще раз, что рассуждения, с помощью которых мы пришли к уравнениям Максвелла, ни в коей мере не могут служить их доказательством. Существенно новые принципы никогда не содержатся в старой теории и не могут быть выведены из нее логически. В этом смысле нельзя вывести и уравнения Максвелла. На них следует смотреть как на *основные аксиомы электродинамики, полученные путем обобщения опытных фактов*.

3. Фундаментальные уравнения Максвелла в форме (82.1) — (82.4) или (82.1a) — (82.4a) не составляют еще полной системы уравнений электромагнитного поля. Среди них два уравнения векторных и два скалярных. Если их записать в координатной форме, то получится всего восемь уравнений, связывающих 16 величин: пятнадцать составляющих векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}$ и скаляр ρ. Ясно, что для 16 величин восьми уравнений недостаточно. Фундаментальные уравнения Максвелла не содержат никаких постоянных, характеризующих свойства среды, в которой возбуждено электромагнитное поле. Необходимо дополнить эти уравнения такими соотношениями, в которые входили бы величины, характеризующие индивидуальные свойства среды. Эти соотношения называются *материальными уравнениями*.

Принципиальный способ получения материальных уравнений дают молекулярные теории поляризации, намагничивания и электропроводности среды. В основе таких теорий лежат какие-то идеализированные модели среды. Применяя к ним уравнения классической или квантовой механики, а также методы статистической физики, можно установить связь между векторами $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{j}$, с одной стороны, и векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ — с другой. Таким путем, в зависимости от характера среды и электромагнитного поля, получаются более или менее сложные соотношения, которые и дополняют фундаментальные уравнения Максвелла до полной системы уравнений электродинамики.

Наиболее просты материальные уравнения в случае слабых электромагнитных полей, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени. В этом случае для изотропных неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред материальные уравнения могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{82.10}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}, \tag{82.11}$$

$$\boldsymbol{j}=\lambda\boldsymbol{E}, \tag{82.12}$$

где ε, μ, λ — постоянные, характеризующие электромагнитные свойства среды. Они называются *диэлектрической* и *магнитной* *проницаемостью* и *электропроводностью среды*. Такими материальными уравнениями пользовался сам Максвелл. Разумеется, он не связывал величины ε, μ, λ с атомными и молекулярными константами вещества, а рассматривал их как постоянные, вводимые в теорию *феноменологически*. Электронная теория показала, что справедливость таких материальных уравнений связана с выполнением двух условий. Во-первых, за времена порядка собственных периодов внутриатомных и внутримолекулярных колебаний электромагнитное поле должно меняться мало. Во-вторых, поле должно меняться мало на протяжении межатомных и межмолекулярных расстояний. Это и есть та «медленность» изменения полей, о которой говорилось выше.

Иногда уравнения (82.10) — (82.12) также включают в систему уравнений Максвелла. Мы не будем этого делать, так как эти уравнения не обладают той общностью и фундаментальностью, которая свойственна уравнениям Максвелла. Под уравнениями Максвелла мы будем понимать только четыре уравнения: (82.1) — (82.4) или (82.1а) — (82.4а).

Когда поля стационарны $(\partial \boldsymbol{D}/\partial t = \partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0)$, уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений. Первую группу составляют уравнения электростатики

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{82.13}$$

вторую — уравнения магнитостатики

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{82.14}$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга. Источниками электрического поля будут только электрические заряды, источниками магнитного поля — только токи проводимости.

§ 83. Скорость распространения электромагнитных возмущений

1. Из уравнений максвелловской электродинамики следует существование принципиально нового физического явления, предсказанного самим Максвеллом. Это — *электромагнитные волны*, или *возмущения*, распространяющиеся в пространстве с определенной скоростью. Убедимся в этом на простейшем примере. Рассмотрим бесконечно протяженную однородную диэлектрическую среду с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ. Поместим в нее бесконечную равномерно заряженную плоскость, которую примем за координатную плоскость XY (рис. 208). Пока плоскость вместе с зарядами на ней неподвижна, электрическое поле в окружающем пространстве будет нормально к плоскости и равно