проницаемостью и *электропроводностью среды*. Такими материальными уравнениями пользовался сам Максвелл. Разумеется, он не связывал величины ε, μ, λ с атомными и молекулярными константами вещества, а рассматривал их как постоянные, вводимые в теорию *феноменологически*. Электронная теория показала, что справедливость таких материальных уравнений связана с выполнением двух условий. Во-первых, за времена порядка собственных периодов внутриатомных и внутримолекулярных колебаний электромагнитное поле должно меняться мало. Во-вторых, поле должно меняться мало на протяжении межатомных и межмолекулярных расстояний. Это и есть та «медленность» изменения полей, о которой говорилось выше.

Иногда уравнения (82.10) — (82.12) также включают в систему уравнений Максвелла. Мы не будем этого делать, так как эти уравнения не обладают той общностью и фундаментальностью, которая свойственна уравнениям Максвелла. Под уравнениями Максвелла мы будем понимать только четыре уравнения: (82.1) — (82.4) или (82.1a) — (82.4a).

Когда поля стационарны ($\partial \boldsymbol{D}/\partial t = \partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0$), уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений. Первую группу составляют уравнения электростатики

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{82.13}$$

вторую — уравнения магнитостатики

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{82.14}$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга. Источниками электрического поля будут только электрические заряды, источниками магнитного поля — только токи проводимости.

§ 83. Скорость распространения электромагнитных возмущений

1. Из уравнений максвелловской электродинамики следует существование принципиально нового физического явления, предсказанного самим Максвеллом. Это — *электромагнитные волны*, или *возмущения*, распространяющиеся в пространстве с определенной скоростью. Убедимся в этом на простейшем примере. Рассмотрим бесконечно протяженную однородную диэлектрическую среду с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ. Поместим в нее бесконечную равномерно заряженную плоскость, которую примем за координатную плоскость XY (рис. 208). Пока плоскость вместе с зарядами на ней неподвижна, электрическое поле в окружающем пространстве будет нормально к плоскости и равно

$E = 2\pi\sigma/\varepsilon$, как это следует из теоремы Гаусса и соображений симметрии (σ — поверхностная плотность заряда, см. §§ 6 и 13). Приведем теперь плоскость вместе с зарядами на ней в движение в направлении оси X с произвольно меняющейся скоростью. Тогда, как будет показано ниже, появится магнитное поле и поперечная составляющая электрического поля, т. е. составляющая, параллельная заряженной плоскости. Это — *переменные поля,* которые и будут интересовать нас в настоящем параграфе. Что касается нормальной составляющей вектора $\boldsymbol{E}$, то она останется без изменений, так как рассуждения, с помощью которых была получена формула (6.1), сохраняют силу и в рассматриваемом случае, если только величину E заменить на D_n. Нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{E}$ есть просто статическое электрическое поле заряженной плоскости, накладывающееся на переменное электромагнитное поле движущихся зарядов. Так как статическое поле нас не интересует, то можно совсем не обращать внимания на наличие нормальной составляющей поля $\boldsymbol{E}$, что мы и будем делать. Можно было бы совсем избавиться от нормальной составляющей, поместив бесконечно близко от заряженной плоскости вторую неподвижную такую же плоскость, заряженную противоположно. Электрическое поле такой плоскости было бы чисто статическим и уничтожило бы нормальную составляющую, о которой мы говорили. В то же время новая заряженная плоскость, поскольку заряды на ней неподвижны, не оказала бы никакого влияния на переменное поле электромагнитной волны.

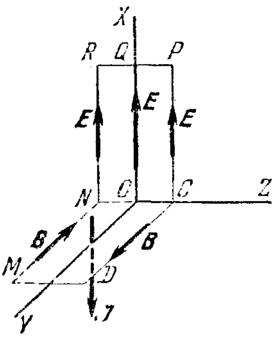

Рис. 208.

2. Исследуем теперь, какое электромагнитное поле возбуждается заряженной плоскостью *благодаря ее движению.* Заряды, движущиеся вместе с плоскостью, эквивалентны электрическому току $\mathscr{I}$, текущему параллельно оси X (на рис. 208 ток течет в отрицательном направлении оси X). Электрический ток возбуждает магнитное поле, силовые линии которого обвиваются вокруг тока. В случае поверхностного тока, текущего по бесконечной плоскости, магнитное поле будет параллельно оси Y: при $z > 0$ оно направлено в положительную, а при $z < 0$ — в отрицательную сторону оси Y. В силу симметрии магнитные поля по разные стороны заряженной плоскости на одинаковых расстояниях от нее одинаковы по величине, но противоположны по направлению. При переходе через заряженную плоскость магнитное поле, в согласии с формулой (82.8), испытывает скачок непрерывности, связанный с поверхностным током.

Магнитные потоки через прямоугольные, симметрично расположенные неподвижные контуры $OCPQ$ и $NOQR$ одинаковы по величине, но противоположны по знаку. Так как эти потоки меняются во времени, то по закону электромагнитной индукции возникнет электрическое поле, циркуляция которого вдоль рассматриваемых контуров отлична от нуля. Электрическое поле будет параллельно оси X, так как вдоль оси Z, как выяснено выше, переменное электрическое поле не возбуждается, а электрического поля вдоль оси Y не будет в силу симметрии. Так как магнитный поток через контур $NCPR$ равен нулю, то будет равна нулю и циркуляция вектора $\boldsymbol{E}$ по тому же контуру. Отсюда следует, что переменное электрическое поле по разные стороны заряженной плоскости на одинаковых расстояниях от нее будет одинаково не только по величине, но и по направлению. На самой плоскости поле E, вообще говоря, будет иметь другое значение. В противном случае циркуляции вектора $\boldsymbol{E}$ по контурам $OCPQ$ и $NOQR$ обратились бы в нуль, а следовательно, магнитные потоки, пронизывающие эти контуры, все время оставались бы постоянными.

Электрическое поле $\boldsymbol{E}$, возбужденное переменным магнитным полем, в свою очередь создаст переменный электрический поток (поток вектора $\boldsymbol{D}$) через прямоугольный контур $CNMD$ (см. рис. 208). Иначе говоря, возникнет ток смещения, который также будет возбуждать магнитное поле, параллельное оси Y. Направление этого магнитного поля определяется правилом Ленца: оно будет препятствовать всяким изменениям уже существующего магнитного поля. Если остановить заряженную плоскость, то ток $\mathcal{I}$ прекратится. Однако возбужденное им электромагнитное поле останется. Электрическое и магнитное поля будут взаимно поддерживать друг друга: всякое изменение магнитного поля возбуждает поле электрическое, и наоборот. Таким образом, по разные стороны заряженной плоскости после ее остановки останутся два электромагнитных поля, симметрично расположенных относительно этой плоскости. Как будет показано ниже, они не останутся на месте, а будут распространяться от заряженной плоскости в противоположных направлениях. Это и есть *электромагнитные волны*, или *электромагнитные возмущения*. Из предыдущего следует, что они поперечны как относительно вектора $\boldsymbol{E}$, так и относительно вектора $\boldsymbol{B}$.

3. Возьмем одно из этих возмущений, например возмущение, расположенное вправо от заряженной плоскости (рис. 209). Электрическое поле в рассматриваемый момент представлено кривой I, расположенной в вертикальной плоскости, а магнитное поле — кривой II, расположенной в горизонтальной плоскости. Введем предположение, оправдываемое последующими расчетами, что эта картина электромагнитного поля без изменения формы перемещается вправо с какой-то скоростью $\boldsymbol{v}$. Возьмем два неподвижных прямо-

угольных контура $OAMN$ и $OQPA$ и запишем уравнения Максвелла в виде

$$\oint\limits_{OAMN} \boldsymbol{E}\,dl = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_{\text{м}}}{\partial t},$$

$$\oint\limits_{OQPA} \boldsymbol{H}\,dl = \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_{\text{эл}}}{\partial t},$$

где $\Phi_{\text{м}}$ — магнитный поток, а $\Phi_{\text{эл}}$ — поток вектора $\boldsymbol{D}$ через соответствующие контуры. Возьмем для простоты длину стороны AM равной единице. Тогда, так как на контуре $OAMN$ поле $\boldsymbol{E}$ отлично от нуля только на стороне AM, первое из этих уравнений принимает вид

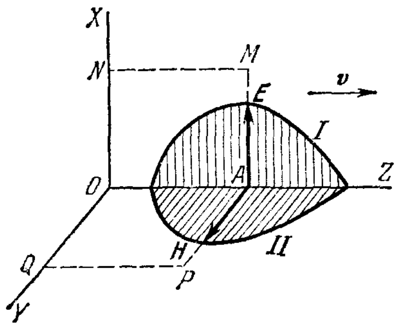

Рис. 209.

$$E \equiv E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_{\text{м}}}{\partial t}.$$

Аналогично, второе уравнение преобразуется к виду

$$H \equiv H_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_{\text{эл}}}{\partial t}.$$

Согласно нашему предположению, за время dt электромагнитное поле переместится на расстояние $v\,dt$. Магнитный поток $vB\,dt$ выйдет за пределы контура $OAMN$, а электрический поток $vDdt$ — за пределы контура $OQPA$. Вследствие этого потоки $\Phi_{\text{м}}$ и $\Phi_{\text{эл}}$ через указанные контуры изменятся на $d\Phi_{\text{м}} = -vBdt$, $d\Phi_{\text{эл}} = -vD\,dt$. Отсюда $\partial\Phi_{\text{м}}/\partial t = -vB$, $\partial\Phi_{\text{эл}}/\partial t = -vD$, и из предыдущих уравнений получаем

$$E = \frac{v}{c}B, \qquad H = \frac{v}{c}D. \tag{83.1}$$

До сих пор не были использованы материальные уравнения $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$. Если их принять во внимание, то можно исключить D и B. Это дает

$$E = \frac{v}{c}\mu H, \qquad H = \frac{v}{c}\varepsilon E. \tag{83.1a}$$

Отсюда

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{83.2}$$

Для скорости v получилось вполне определенное конечное выражение, отличное от нуля. Это оправдывает введенное выше допущение о характере изменения электромагнитного возмущения во времени и пространстве. Действительно, предположив, что электромагнитное возмущение распространяется без изменения формы, мы не фиксировали скорость этого распространения, а определили ее из требования, чтобы возмущение удовлетворяло уравнениям Максвелла. Это возможно только тогда, когда v определяется выражением (83.2). Возмущение не может стоять на месте, так как тогда величина v была бы равна нулю. Оно не может распространяться и мгновенно, так как тогда наше рассуждение привело бы к результату $v = \infty$. Таким образом, уравнения Максвелла допускают решения в виде электромагнитных возмущений, распространяющихся со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

4. Формулы (83.1) можно представить в векторной форме:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}], \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{D}]. \tag{83.3}$$

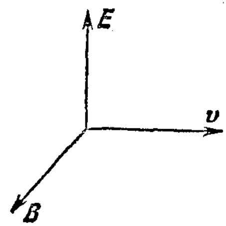

Рис. 210.

Здесь $\boldsymbol{v}$ дает не только скорость распространения возмущения по величине, но и ее направление. Те же самые соотношения справедливы и для возмущения, распространяющегося влево. В обоих случаях векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$ находятся в правовинтовом соотношении между собой (рис. 210). Если изменить направление одного из векторов $\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{B}$ на противоположное, то направление распространения возмущения также изменится на противоположное.

Формулы (83.3) описывают так называемое *плоское возмущение*, т. е. такое возмущение, в котором электромагнитное поле одно и то же во всех точках плоскости, перпендикулярной к его распространению (эта плоскость называется *фронтом волны*). Для более полной характеристики его называют также *бегущим возмущением* (или *бегущей волной*), поскольку оно распространяется только в одном направлении. В нашем примере электрический вектор был параллелен оси X, а магнитный — оси Y. Конечно, возможно и возмущение с электрическим вектором вдоль оси Y и магнитным вдоль оси X. Ввиду линейности и однородности уравнений Максвелла суперпозиция таких возмущений будет также решением этих уравнений. Эта суперпозиция представляет также *плоскую бегущую электромагнитную волну*, для которой справедливы соотношения (83.3). Электрический и магнитный векторы в такой волне всегда перпендикулярны между собой, а также к направлению ее распространения. Однако не обязательно, чтобы электрический вектор все время лежал в одной и той же плоскости, его направление в пространстве может изменяться. То же относится и к магнитному вектору. В частном случае, когда электрический (а следовательно, и магнитный) вектор во всех точках пространства лежит в одной плоскости, волна называется *линейно поляризованной*.

5. Рассмотренный нами мысленный пример возбуждения электромагнитных волн наиболее прост в теоретическом отношении. Совсем не обязательно брать бесконечную заряженную плоскость и приводить ее в движение. Мы поступили так только потому, чтобы возмущение получилось плоским. Для возбуждения же электромагнитных волн существенно только наличие *электрических зарядов, движущихся ускоренно*. В передающих радиостанциях электромагнитные волны возбуждаются быстропеременными электрическими токами, текущими по системе проводов (в антеннах). Волны, возбуждаемые таким образом, конечно, не будут плоскими. Только на больших расстояниях от излучающей антенны небольшие участки таких волн могут рассматриваться как приблизительно плоские. Вот почему на примере плоских возмущений выявляются все наиболее важные особенности электромагнитных волн.

6. Из формул (83.1а) следует

$$\varepsilon E^2 = \mu H^2. \tag{83.4}$$

Это означает, что *в бегущей плоской электромагнитной волне электрическая энергия в любой момент равна магнитной*. Аналогичное положение имеет место в случае упругой бегущей волны, где полная энергия также распределяется поровну между кинетической и потенциальной (см. т. I, § 82). Таким свойством обладают все возмущения, подчиняющиеся *принципу суперпозиции*. Для электромагнитных волн это свойство можно было бы доказать тем же методом, каким оно было получено для упругих волн в механике (см. т. I, § 82, пункт 2). Надо только рассмотреть возмущения, получающиеся из начального состояния, в котором отлично от нуля либо только электрическое, либо только магнитное поле.

7. В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$, и формула (83.2) дает $v = c$. Опыты Вильгельма Вебера (1804—1891) и Рудольфа Кольрауша (1809—1858) по измерению электродинамической постоянной c, а также все последующие измерения показали, что *электродинамическая постоянная равна скорости света в вакууме*. Таким образом, *в вакууме электромагнитные волны должны распространяться со скоростью света*. Это обстоятельство, по-видимому, навело Максвелла на мысль об электромагнитной теории света. Согласно этой теории *свет есть частный случай электромагнитных волн*. От всех остальных электромагнитных волн свет отличается только количественно — длиной волны. Сам Максвелл не предпринял попыток получить электромагнитные волны на опыте, хотя он и был не только величайшим теоретиком, но и первоклассным экспериментатором. Максвеллу не суждено было дожить до экспериментального подтверждения своего открытия, он умер в 1879 г. в возрасте 48 лет. На опыте электромагнитные волны впервые были получены Герцем в 1887—1888 гг.

Он показал, что электромагнитные волны распространяются, отражаются, преломляются, огибают препятствия, интерферируют. Он измерил скорость распространения электромагнитных волн и показал, что их свойства правильно описываются уравнениями Максвелла. Начиная с этого момента, теория Максвелла быстро получила всеобщее признание. (Опыты Герца будут описаны в § 142 после того, как мы познакомимся с переменными токами и электромагнитными колебаниями.) Открытие Максвелла и Герца вскоре привело к изобретению радио А. С. Поповым (1859—1906).

8. Уравнение Ньютона $m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ в случае консервативных сил не меняется, если изменить знак времени, т. е. заменить t на $-t$. С этой симметрией уравнений механики связано следующее свойство консервативных систем. *Если в некоторый момент времени изменить на противоположные направления скоростей всех материальных точек замкнутой консервативной системы, то система повторит свое движение в обратном порядке.*

Аналогичной симметрией обладают и уравнения Максвелла в непроводящих (непоглощающих) средах. Действительно, в таких средах уравнения Максвелла (с учетом материальных уравнений) записываются в виде

$$\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{B}}{\mu} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0. \tag{83.5}$$

Если в этих уравнениях изменить знаки у времени t и вектора $\boldsymbol{B}$, то они перейдут в

$$\operatorname{rot}\left(\frac{-\boldsymbol{B}}{\mu}\right) = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial(-t)}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(-\boldsymbol{B})}{\partial(-t)}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{83.6}$$

т. е. в уравнения, тождественные с исходными уравнениями (83.5). Таким образом, *уравнения Максвелла в непроводящих средах не меняются при одновременном изменении знаков у t и $\boldsymbol{B}$. То же самое имеет место при одновременном изменении знаков у t и $\boldsymbol{E}$.*

Возьмем теперь произвольное решение уравнений (83.5):

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{r}). \tag{83.7}$$

Тогда

$$\boldsymbol{E}_1(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(-t, \boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{B}_1(t, \boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\Phi}(-t, \boldsymbol{r}) \tag{83.8}$$

будет также решением тех же уравнений, так как оно удовлетворяет уравнениям (83.6), тождественным с уравнениями (83.5). Заданием во всем пространстве векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ в начальный (произвольно выбранный) момент времени $t = 0$ решение системы уравнений (83.5) определяется однозначно. Решение (83.7) удовлетворяет начальным условиям

$$\boldsymbol{E}_{t=0}=\boldsymbol{F}(0,\ \boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{B}_{t=0}=\boldsymbol{\Phi}(0,\ \boldsymbol{r}),$$

а решение (83.8) — начальным условиям

$$\boldsymbol{E}_{1,\,t=0}=\boldsymbol{F}(0,\ \boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{B}_{1,\,t=0}=-\boldsymbol{\Phi}(0,\ \boldsymbol{r}).$$

Эти решения, очевидно, связаны соотношениями

$$\boldsymbol{E}_1(t,\ \boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(-t,\ \boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{B}_1(t,\ \boldsymbol{r})=-\boldsymbol{B}(-t,\ \boldsymbol{r}),$$

выражающими следующий результат. *Если в некоторый момент времени изменить на противоположное направление магнитного вектора во всех точках пространства, то при отсутствии проводящих тел электромагнитное поле повторит свою историю в обратном порядке, с той только разницей, что вектор* $\boldsymbol{B}$ *в соответствующие моменты времени будет направлен противоположно по сравнению с его направлением в исходном процессе.*

§ 84. Энергия и поток энергии

1. Уравнения Максвелла необходимо дополнить соотношениями, выражающими закон сохранения энергии. Пусть среда, в которой возбуждается электромагнитное поле, неподвижна. При изменении электромагнитного поля и прохождении электрического тока в единице объема совершается элементарная внешняя работа

$$\delta A^{\text{внеш}}=\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{jE})\,dt. \qquad (84.1)$$

Отдельные слагаемые этого выражения были получены в электростатике и в учении о магнитных полях постоянных токов. Отметим особо, что при получении работы намагничивания $\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B}$ была использована теорема о циркуляции без учета тока смещения. Однако это не обязательно должно отразиться на общности окончательного результата $\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B}$, так как и исходное выражение для элементарной работы (69.1) получено также без учета тока смещения. Поэтому отмеченное обстоятельство не препятствует распространению выражения (84.1) и на случай переменных электромагнитных полей. Выражение (84.1) должно рассматриваться как один из постулатов макроскопической теории электричества.

2. Работа (84.1) идет на приращение внутренней энергии за вычетом тепла, уходящего из единицы объема среды вследствие теплопроводности. От теплопроводности можно отвлечься, предполагая, что она равна нулю. Это не сказывается на общности окончательного результата. Таким образом, если u — внутренняя