начальным условиям

$$\boldsymbol{E}_{t=0}=\boldsymbol{F}(0,\ \boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{B}_{t=0}=\boldsymbol{\Phi}(0,\ \boldsymbol{r}),$$

а решение (83.8) — начальным условиям

$$\boldsymbol{E}_{1,\,t=0}=\boldsymbol{F}(0,\ \boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{B}_{1,\,t=0}=-\boldsymbol{\Phi}(0,\ \boldsymbol{r}).$$

Эти решения, очевидно, связаны соотношениями

$$\boldsymbol{E}_1(t,\ \boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(-t,\ \boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{B}_1(t,\ \boldsymbol{r})=-\boldsymbol{B}(-t,\ \boldsymbol{r}),$$

выражающими следующий результат. *Если в некоторый момент времени изменить на противоположное направление магнитного вектора во всех точках пространства, то при отсутствии проводящих тел электромагнитное поле повторит свою историю в обратном порядке, с той только разницей, что вектор* $\boldsymbol{B}$ *в соответствующие моменты времени будет направлен противоположно по сравнению с его направлением в исходном процессе.*

§ 84. Энергия и поток энергии

1. Уравнения Максвелла необходимо дополнить соотношениями, выражающими закон сохранения энергии. Пусть среда, в которой возбуждается электромагнитное поле, неподвижна. При изменении электромагнитного поля и прохождении электрического тока в единице объема совершается элементарная внешняя работа

$$\delta A^{\text{внеш}}=\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{jE})\,dt. \tag{84.1}$$

Отдельные слагаемые этого выражения были получены в электростатике и в учении о магнитных полях постоянных токов. Отметим особо, что при получении работы намагничивания $\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B}$ была использована теорема о циркуляции без учета тока смещения. Однако это не обязательно должно отразиться на общности окончательного результата $\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B}$, так как и исходное выражение для элементарной работы (69.1) получено также без учета тока смещения. Поэтому отмеченное обстоятельство не препятствует распространению выражения (84.1) и на случай переменных электромагнитных полей. Выражение (84.1) должно рассматриваться как один из постулатов макроскопической теории электричества.

2. Работа (84.1) идет на приращение внутренней энергии за вычетом тепла, уходящего из единицы объема среды вследствие теплопроводности. От теплопроводности можно отвлечься, предполагая, что она равна нулю. Это не сказывается на общности окончательного результата. Таким образом, если u — внутренняя

энергия единицы объема среды, то $\delta A^{\text{внеш}} = du$, или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}}\right) + (\boldsymbol{jE}). \tag{84.2}$$

Под u мы понимаем плотность *всей* внутренней энергии, а не только электромагнитную часть ее. Поэтому уравнение (84.2) справедливо для любых сред, в том числе ферромагнитных и сегнетоэлектрических. Оно учитывает не только джоулево тепло (слагаемое $\boldsymbol{jE}$), но и тепло ферромагнитного и диэлектрического гистерезиса. Используя уравнения Максвелла (82.1а) и (82.2а), преобразуем правую часть уравнения (84.2) к виду

$$\boldsymbol{E}\left(\frac{1}{4\pi}\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{j}\right) + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}} = \frac{c}{4\pi}\left(\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}\right).$$

В силу известного векторного тождества

$$\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\operatorname{div}[\boldsymbol{EH}].$$

Поэтому, если ввести обозначение

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}], \tag{84.3}$$

то уравнение (84.2) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{S} = 0. \tag{84.4}$$

Для физической интерпретации этого уравнения сравним его с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0, \tag{84.5}$$

в котором ρ означает плотность вещества или электричества, а $\boldsymbol{j}$ — плотность потока вещества или электрического тока.

Формальная аналогия между уравнениями (84.4) и (84.5) приводит к представлению, что энергия течет в пространстве подобно жидкости, причем вектор $\boldsymbol{S}$ играет роль *плотности потока электромагнитной энергии*. Математически это представление выражается более наглядно и непосредственно, если уравнение (84.4) записать в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u\,dV = \oint S_n\,dF, \tag{84.4a}$$

где V — произвольный объем среды, ограниченный замкнутой поверхностью F, а $\boldsymbol{n}$ — внутренняя нормаль к этой поверхности. В такой форме уравнение означает, что приращение внутренней энергии в объеме V происходит за счет электромагнитной энергии, втекающей в этот объем из окружающего пространства через поверхность F.

Представление о течении энергии сохраняется также при учете теплопроводности и упругих свойств среды, но к плотности потока электромагнитной энергии в этом случае надо добавить *плотность потока тепла* и *плотность упругой энергии.*

Общее представление о потоке энергии в пространстве впервые было введено Н. А. Умовым (1846—1915) в 1874 г. Поэтому вектор плотности потока энергии без конкретизации ее физической природы называется *вектором Умова.* Конкретные выражения для этого вектора были получены Умовым, естественно, только для упругих сред и вязких жидкостей. Через 11 лет идеи Умова были разработаны Пойнтингом (1852—1914) применительно к электромагнитной энергии. Пойнтингом было получено и выражение (84.3), а потому вектор $\boldsymbol{S}$ называется *вектором Пойнтинга.* Формула (84.4), или (84.4а), выражает закон сохранения энергии в электродинамике и носит название *теоремы Умова — Пойнтинга.* Отметим замечательную простоту и общность формулы (84.3). Вектор Пойнтинга выражается только через напряженности полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и не содержит никаких величин, характеризующих индивидуальные свойства среды, в которой течет электромагнитная энергия.

3. Допустим теперь, что нет гистерезиса. Тогда вектор $\boldsymbol{D}$ будет однозначной функцией вектора $\boldsymbol{E}$, а вектор $\boldsymbol{B}$ — однозначной функцией вектора $\boldsymbol{H}$. Тепла гистерезиса не будет, и элементарная работа $\delta A^{\text{внеш}}$ пойдет только на выделение джоулева тепла $(\boldsymbol{jE})\,dt$ и на приращение электромагнитной энергии. Поэтому в соответствии с формулой (84.1) выражение

$$dw = \frac{1}{4\pi}\,(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B}) \tag{84.6}$$

должно быть истолковано как приращение плотности электромагнитной энергии w. Сама величина w представится интегралом

$$w = \frac{1}{4\pi}\int (\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B}). \tag{84.7}$$

В частном случае, когда справедливы соотношения $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, отсюда получаем

$$w = \frac{1}{8\pi}\,(\varepsilon E^2 + \mu H^2), \tag{84.8}$$

или

$$w = \frac{1}{8\pi}\,(\boldsymbol{ED} + \boldsymbol{HB}). \tag{84.9}$$

4. Приведем примеры на течение электромагнитной энергии.

Пример 1. Поток энергии в плоской электромагнитной волне (см. рис. 210). Поскольку волна распространяется в одном направлении, электромагнитная энергия должна распространяться в том же направлении. Поток энергии численно равен количеству энергии, переносимому в одну секунду через квадратный сантиметр, перпендикулярный к направлению распространения волны. Если v — скорость распространения волны, то $S = vw$. Согласно соотношению (83.4) в плоской бегущей волне плотность электрической энергии равна плотности магнитной, а потому $w = \frac{\varepsilon}{4\pi} E^2$. В силу того же соотношения $\sqrt{\varepsilon}\, E = \sqrt{\mu}\, H$. Поэтому $w = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\varepsilon\mu}\, EH$. Если учесть еще формулу (83.2), то получится

$$S = vw = \frac{c}{4\pi} EH.$$

Так как волна распространяется в направлении вектора $[\boldsymbol{EH}]$, то это выражение совпадает с выражением (84.3).

Пример 2. Выделение джоулева тепла в проводе. По цилиндрическому проводу радиуса r течет постоянный ток $\mathscr{I}$ (рис. 211). Магнитное поле обвивается вокруг тока и на поверхности провода равно $H = 2\mathscr{I}/(cr) = 2j\pi r/c$. Электрическое поле $\boldsymbol{E}$ параллельно оси провода. Таким образом, вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S}$ направлен внутрь провода нормально к его боковой поверхности. Следовательно, электромагнитная энергия втекает внутрь провода из окружающего пространства. Площадь боковой поверхности провода равна $2\pi rl$, где l — его длина. Количество электромагнитной энергии, ежесекундно вступающей в провод, будет

$$S\cdot 2\pi rl = \frac{c}{4\pi} EH\cdot 2\pi rl = \pi r^2 l\cdot jE = V\cdot jE,$$

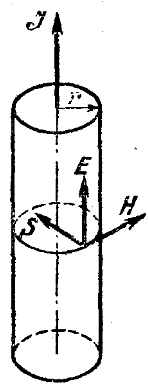

Рис. 211.

где $V = \pi r^2 l$ — объем провода. Но такое же количество тепла выделяется в проводе при прохождении электрического тока. Таким образом, *электромагнитная энергия из окружающего пространства вступает внутрь провода и в нем превращается в джоулево тепло.*

Пример 3. Зарядка конденсатора. Допустим, что конденсатор плоский с круговыми обкладками, а зарядка производится квазистатически. Отвлечемся от неоднородностей электромагнитного поля вблизи краев конденсатора. Тогда расчет производится так же, как в предыдущем примере. Надо только плотность тока проводимости $\boldsymbol{j}$ заменить на плотность тока смещения $\dot{\boldsymbol{D}}/(4\pi)$. Сделав это, найдем, что из окружающего пространства ежесекундно в конденсатор втекает электромагнитная энергия $\frac{V}{4\pi}(\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}})$, где V — объем конденсатора. Приращение энергии конденсатора за время dt будет

$dW = \frac{V}{4\pi}(\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}})\,dt = \frac{V}{4\pi}(\boldsymbol{E}d\boldsymbol{D})$. Интегрируя это выражение в предположении, что справедливо соотношение $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, получим

$$W = \frac{V}{8\pi}(\boldsymbol{ED}).$$

Рассуждение существенно не изменится, если принять во внимание неоднородности электрического и магнитного полей вблизи краев конденсатора. Вблизи краев у поля $\boldsymbol{E}$ имеется радиальная слагающая, а у поля $\boldsymbol{H}$ — слагающая, параллельная оси конденсатора. Это приводит к появлению дополнительных потоков энергии, параллельных оси конденсатора. Однако, ввиду симметрии, поток энергии, направленный вверх, будет компенсирован потоком, направленным вниз. Поэтому полный поток энергии, вступающей в конденсатор, определяется только осевой слагающей вектора $\boldsymbol{E}$ и азимутальной слагающей вектора $\boldsymbol{H}$. Если пренебречь изменениями этих слагающих вблизи краев конденсатора, то получится результат, найденный выше.

Таким же путем можно получить выражение для магнитной энергии соленоида, по которому течет постоянный ток. Это рекомендуется сделать читателю.

5. Относительно приведенного вывода выражения для плотности потока электромагнитной энергии необходимо сделать следующее принципиальное замечание. Уравнения (84.4) и (84.4а) не изменятся, если вектор $\boldsymbol{S}$ заменить на $\boldsymbol{S} + \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор. Действительно, дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю. Тождественно равен нулю и поток вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ через произвольную замкнутую поверхность. Таким образом, приведенными рассуждениями вектор плотности потока электромагнитной энергии определяется не однозначно. Это не создает никаких трудностей в применениях закона сохранения энергии, так как при этом речь идет всегда о потоках энергии через *замкнутые поверхности*. Трудности возникают, во всяком случае в дорелятивистской физике, когда представление о потоке энергии применяется к *незамкнутым поверхностям*. В дорелятивистской физике хотя и вводилось представление о локализации энергии в пространстве, но на саму энергию никогда не смотрели как на какую-то субстанцию, которой присущи определенная масса и движение. Теория относительности устранила это принципиальное различие между массой и энергией и показала, что *всякая энергия обладает массой: масса равна энергии, деленной на квадрат скорости света*. Но поток вещества и связанный с ним поток массы являются величинами вполне определенными и однозначными. Поэтому той же определенностью и однозначностью должен обладать и поток энергии.

Вместе с тем поток энергии должен быть связан с *потоком импульса*. Определим плотность потока импульса $\boldsymbol{g}$ для электромагнитного поля и ограничимся полем в вакууме, чтобы в дальнейшем избежать усложнений, вносимых наличием вещества. Пусть w — плотность электромагнитной энергии. Соответствующая ей плотность массы будет w/c^2. Если энергия движется со скоростью $\boldsymbol{v}$, то с этим движением связан импульс, значение которого в единице объема среды дается выражением $\boldsymbol{g}_{\text{эл}} = w\boldsymbol{v}/c^2$. Этот импульс называется *электромагнитным импульсом* или *импульсом электромагнитного поля.* Замечая, что $w\boldsymbol{v}$ есть плотность потока $\boldsymbol{S}$ электромагнитной энергии, получаем для плотности электромагнитного импульса

$$\boldsymbol{g}_{\text{эл}} = \frac{\boldsymbol{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}[\boldsymbol{EH}]. \tag{84.10}$$

Понятие электромагнитного импульса было введено Максом Абрагамом (1875—1922) еще до возникновения теории относительности.

6. Рассмотрим теперь случай, когда электромагнитное поле $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ статическое, т. е. не меняется во времени. Согласно формуле (84.3) должен существовать поток электромагнитной энергии во всех точках пространства, где векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не коллинеарны. Так как для стационарных процессов $\partial u/\partial t = 0$, то из уравнения (84.4) следует $\operatorname{div} \boldsymbol{S} = 0$. Это значит, что энергия течет подобно несжимаемой жидкости: во всякий объем пространства втекает столько же энергии, сколько и вытекает. Непосредственно такое течение электромагнитной энергии не проявляется ни в каких физических явлениях. Однако оно приводит к следствиям, допускающим экспериментальную проверку, если учесть, что с потоком электромагнитной энергии связан электромагнитный импульс и его момент. Пример, приводимый ниже, показывает, что это действительно так.

Рассмотрим заряженный цилиндрический конденсатор, помещенный в постоянное однородное магнитное поле $\boldsymbol{H}$, параллельное оси конденсатора (рис. 212, *а*). Поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ взаимно перпендикулярны. Вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S}$ направлен по касательным к коаксиальным окружностям, центры которых расположены на оси конденсатора, а плоскости перпендикулярны к этой оси (рис. 212, *б*). Таким образом, происходит непрерывная циркуляция электромагнитной энергии вдоль этих окружностей. Полный электромагнитный импульс системы, ввиду ее аксиальной симметрии, равен нулю. Однако момент этого импульса $\boldsymbol{L}_{\text{эл}}$ относительно оси системы отличен от нуля. Именно

$$L_{\text{эл}} = \int r g_{\text{эл}}\, dV = \frac{1}{4\pi c}\int rEH\, dV.$$

Подставив сюда $E = 2Q/(lr)$, $dV = 2\pi r l\, dr$ и выполнив интегрирование, получим

$$L_{\text{эл}} = \frac{QH}{c}\int_0^R r\, dr = \frac{QH}{2c}R^2,$$

где l — длина конденсатора, Q — его заряд, а R — радиус наружной обкладки. Для упрощения вычислений радиусом внутренней обкладки мы пренебрегаем, предполагая его малым. Как видно из рисунка, вектор $\mathbf{L}_{эл}$ направлен против поля $\mathbf{H}$, когда внутренняя обкладка заряжена положительно, и по полю $\mathbf{H}$, когда она заряжена отрицательно. Будем предполагать, что положительный заряд находится на внутренней обкладке, и напишем

$$\mathbf{L}_{эл} = -\frac{QR^2}{2c}\mathbf{H}. \tag{84.11}$$

Допустим теперь, что в конденсаторе от внутренней обкладки к наружной течет радиальный электрический ток, медленно разряжающий конденсатор. Для этого надо предположить, что конденсатор

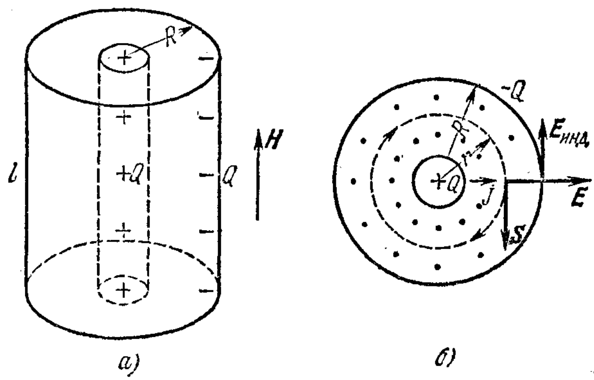

Рис. 212.

заполнен слабо проводящей средой, диэлектрическая и магнитная проницаемости которой практически не отличаются от единицы. После разряда электромагнитный момент импульса (84.10) исчезнет, и конденсатор должен получить такой же по величине и по направлению механический момент импульса. Если конденсатор был подвешен на нити, то после разряда нить должна закрутиться. Что это действительно так, показывает следующее рассуждение.

Если $\mathbf{j}$ — объемная плотность радиального тока, то на элемент объема диэлектрика действует амперова сила $d\mathbf{F} = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}]\,dV$. Момент dM этой силы относительно оси конденсатора численно равен $\frac{1}{c}\,rjH\,dV$ и направлен против поля $\mathbf{H}$, как это видно из рис. 212, *б*. Таким образом, в векторной форме $d\mathbf{M} = -\frac{1}{c}\,rj\mathbf{H}\,dV$. Подставив сюда $dV = 2\pi rl\,dr$, $j = \mathscr{J}/(2\pi rl)$, после интегрирования получим

$$M = -\frac{\mathcal{J}H}{c}\int_0^R r\,dr = -\frac{\mathcal{J}R^2}{2c}\boldsymbol{H}.$$

Под действием момента $\boldsymbol{M}$ механический момент импульса конденсатора будет изменяться в соответствии с уравнением

$$d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\,dt = -\frac{R^2\boldsymbol{H}}{2c}\mathcal{J}\,dt = -\frac{R^2\boldsymbol{H}}{2c}dQ.$$

Выполнив интегрирование, найдем, что после разрядки момент импульса конденсатора будет

$$\boldsymbol{L} = -\frac{QR^2}{2c}\boldsymbol{H}, \tag{84.12}$$

в согласии с прежним результатом.

К тому же результату мы придем, если, оставляя конденсатор заряженным, выключим магнитное поле $\boldsymbol{H}$. При выключении магнитного поля возникнет кольцевое электрическое поле. На окружности радиуса R напряженность этого поля определится по закону электромагнитной индукции: $2\pi R E_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\pi R^2\frac{dH}{dt}$, откуда

$$E_{\text{инд}} = -\frac{R}{2c}\frac{dH}{dt}.$$

На отрицательный заряд $-Q$ такое поле будет действовать с моментом

$$\boldsymbol{M} = \frac{Q}{2c}R^2\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}.$$

Поэтому $d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\,dt = \frac{Q}{2c}R^2\,d\boldsymbol{H}$. Интегрируя в пределах от $\boldsymbol{H}$ до 0, получаем прежний результат (84.12).

Разобранный здесь эффект крайне мал, но в принципе может наблюдаться.

ЗАДАЧИ

1. Плоский воздушный конденсатор, обкладками которого являются два одинаковых диска, заряжен до высокой разности потенциалов и затем отключен от источника напряжения. В центре конденсатора происходит пробой (проскакивает электрическая искра), в результате чего конденсатор разряжается. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, определить полный поток электромагнитной энергии, вытекающей из пространства между обкладками. Обсудить явление с точки зрения сохранения и превращения энергии.

Ответ. Поток энергии равен нулю (см. задачу 3 к § 81).

2. Плоскому конденсатору емкости C, обкладками которого являются два одинаковых диска, сообщен заряд Q. Затем конденсатор был отключен от источника электричества. После этого пластины были соединены длинным цилиндрическим проводом, проходящим вне конденсатора, и конденсатор разрядился. Пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, показать непосредственным расчетом, что полный поток электромагнитной энергии из конденсатора равен полному потоку электромагнитной энергии, втекающей внутрь провода. Проанализировать явление с точки зрения представления о движении, превращении и сохранении энергии.

Указание. См. примеры 2 и 3 из текста настоящего параграфа.

Ответ. Электрическая энергия вытекает из конденсатора через его края, втекает внутрь провода и там превращается во внутреннюю (тепловую) энергию.

3. Плоский воздушный конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков, заряжен электричеством и помещен внутри соленоида, создающего однородное постоянное магнитное поле $B = 1000$ Гс. Магнитное поле создается батареей, посылающей постоянный ток в обмотку электромагнита. Электрическое поле между пластинами конденсатора равно $E = 10\,000$ В/см. Объем воздушного пространства между пластинами конденсатора равен $V = 100$ см^3. Конденсатор пробивается электрической искрой вдоль его оси и в результате этого разряжается. Как изменится механический импульс системы после пробоя? Обсудить результат с точки зрения закона сохранения импульса.

Решение. Ввиду осевой симметрии полный электромагнитный импульс поля равен нулю. В результате разряда конденсатора он измениться не может. Поэтому не может измениться и полный механический импульс системы. Но в результате разряда электромагнитный импульс, локализированный в конденсаторе, уменьшается на $\frac{V}{4\pi c}[EH]$, а электромагнитный импульс поля вне конденсатора увеличивается на такую же величину. В соответствии с этим конденсатор приобретает механический импульс $\frac{V}{4\pi c}[EH]$, равный $\sim 10^{-4}$ г·см/с. Соленоид получит такой же, но противоположно направленный импульс. Искру можно рассматривать как ток проводимости. Если бы все электрическое поле конденсатора было локализовано только внутри него, то магнитное поле искры вне конденсатора было бы полностью компенсировано магнитным полем тока смещения (см. задачу 3 к § 81). На самом деле часть тока смещения проходит вне конденсатора и создает там магнитное поле. Это магнитное поле действует на токи, текущие в соленоиде, и меняет импульс последнего.

4. В предыдущей задаче конденсатор не пробивается, а разрывается цепь батареи, питающей соленоид. Как в результате этого изменится механический импульс системы?

Ответ. Так же, как в предыдущей задаче.

§ 85. Международная система единиц (СИ)

1. В механике строго научная система единиц (СГС), в которой за основные величины приняты *длина*, *масса* и *время*, была разработана на основе законов Ньютона. В худшем положении оказалась электродинамика, основные принципы которой (уравнения Максвелла) были установлены и получили признание только в конце 19 века. До этого времени уже получили широкое распространение случайно выбранные практические единицы: *вольт*, *ампер*, *ом* и их производные, никак не связанные с системой единиц в механике. Естественно было ввести единую систему единиц для механических и электромагнитных величин. Здесь физика и электротехника пошли разными путями. Физика не вводила новых основных величин, а рассматривала электрические и магнитные величины как *производные механических*. Построенные по такому принципу системы