

## ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

\* \*

### § 86. Движение в постоянных и однородных полях

1. Вопросы о движении заряженных частиц в электромагнитных полях были уже частично рассмотрены в виде задач к §§ 4 и 57. Изучим теперь эти вопросы более систематически. При этом мы исключим из рассмотрения весь материал, относящийся к электронной и ионной оптике. Его предполагается включить в следующий том после изложения геометрической оптики. Не будем также касаться ускорителей и масс-спектрометрии, так как этот материал более уместно изложить в разделе атомной и ядерной физики.

Простейшим случаем является движение частиц в постоянных и однородных электромагнитных полях.

2. В постоянном электрическом поле на частицу с зарядом  $e$  действует сила  $F = eE$ . Если движение не релятивистское, а поле однородно, то частица движется с постоянным ускорением  $a = eE/m$ . Такое движение вполне аналогично движению частицы в постоянном однородном гравитационном поле. В общем случае траекторией движения будет парабола. Для релятивистских движений масса частицы  $m$  возрастает со скоростью  $v$ , а ускорение — убывает. Разбор этого случая дается в задаче, помещенной в конце этого параграфа.

3. В постоянном магнитном поле на заряженную частицу действует сила  $F_m = \frac{e}{c} [vB]$ . Эта сила перпендикулярна к скорости  $v$ , а потому работы не производит. Она только искривляет траекторию, но не изменяет величину скорости частицы. Не меняется, следовательно, и релятивистская масса частицы  $m$ .

Допустим теперь, что магнитное поле не только постоянно, но и однородно. Если скорость частицы направлена вдоль поля  $B$ , то сила  $F_m$  обратится в нуль. Частица будет двигаться прямолинейно с постоянной скоростью, магнитное поле не влияет на движение частицы, если последнее происходит вдоль поля.

Если же частица движется перпендикулярно к магнитному полю, то ее скорость, оставаясь постоянной по величине, меняется по направлению. Сила  $F_m = \frac{e}{c} [vB]$  также постоянна по величине и нормальна к траектории частицы. Отсюда следует, что траекторией частицы будет окружность, плоскость которой перпендикуляр-

на к магнитному полю. Направление вращения частицы по окружности показано на рис. 213 (магнитное поле направлено к читателю). Если заряд  $e$  положителен, то направления вектора  $\mathbf{B}$  и угловой скорости вращения  $\boldsymbol{\omega}$  противоположны. Если же заряд  $e$  отрицателен, то эти направления совпадают. Ускорение частицы направлено к центру окружности, по которой она вращается, и равно  $\omega^2 \rho$ , где  $\rho$  — радиус этой окружности. Величина угловой скорости  $\omega$

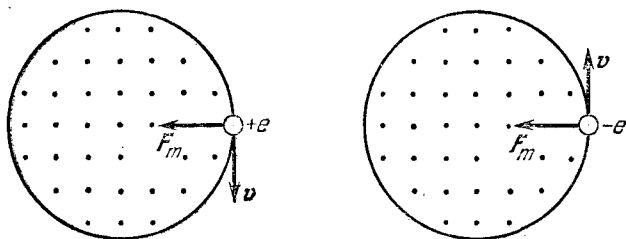


Рис. 213.

найдется из уравнения движения  $m\omega^2 \rho = |e| Bv / c$ . Так как  $v = \omega \rho$ , то отсюда получаем  $\omega = |e| B / (mc)$ , или в векторной форме

$$\boldsymbol{\omega} = - \frac{e\mathbf{B}}{mc}. \quad (86.1)$$

Величина  $\omega$  называется *циклотронной частотой*, а  $\rho$  — *циклотронным* или *ларморовским радиусом*<sup>1)</sup>. Заметим, что формула (86.1) справедлива как для нерелятивистских, так и для релятивистских движений, если только под  $m$  понимать релятивистскую массу частицы.

При рассмотрении общего случая, когда скорость  $\mathbf{v}$  направлена под углом к магнитному полю, ограничимся нерелятивистскими скоростями. Представим скорость  $\mathbf{v}$  в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$ , где  $\mathbf{v}_{\parallel}$  — скорость вдоль поля, а  $\mathbf{v}_{\perp}$  — перпендикулярно к нему. Движения с этими скоростями независимы. Первое есть равномерное прямолинейное движение вдоль поля со скоростью  $v_{\parallel}$ , второе — равномерное вращение по окружности вокруг поля с угловой скоростью (86.1). Радиус этой окружности равен  $\rho = v_{\perp} / \omega$ . В результате сложения обоих движений возникает движение по спирали, ось которой параллельна магнитному полю (рис. 214).

4. Допустим теперь, что на постоянное однородное магнитное поле  $\mathbf{B}$  наложено постоянное же однородное электрическое поле  $\mathbf{E}$ . Будем предполагать, что  $E \ll B$ . Только при выполнении этого

<sup>1)</sup> Величину  $\omega$  часто называют также *ларморовской частотой*. Однако, во избежание путаницы, мы будем называть ларморовской частотой величину, вдвое меньшую, т. е.  $|e| B / (2mc)$  (см. § 76).

условия, как будет видно из дальнейшего, движение может происходить с нерелятивистскими скоростями. Движение описывается уравнением

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]\right). \quad (86.2)$$

Введем систему отсчета, равномерно движущуюся относительно исходной со скоростью  $\mathbf{v}_d$ . В новой системе относительная скорость частицы  $\mathbf{v}'$  удовлетворяет уравнению

$$m\dot{\mathbf{v}}' = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}'\mathbf{B}] + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_d\mathbf{B}]\right).$$

Допустим сначала, что вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен к магнитному полю  $\mathbf{B}$ . Подберем скорость  $\mathbf{v}_d$  так, чтобы выполнялось условие  $\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_d\mathbf{B}] = 0$ , из которого следует

$$\mathbf{v}_d = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2}, \quad (86.3)$$

а потому

$$m\dot{\mathbf{v}}' = \frac{e}{c}[\mathbf{v}'\mathbf{B}].$$

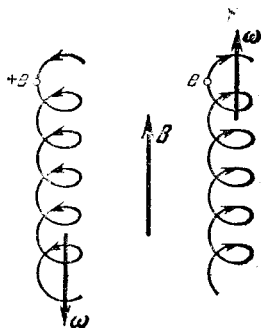


Рис. 214.

В новой системе отсчета из уравнения относительного движения электрическое поле исключилось. Его влияние компенсировано скоростью  $\mathbf{v}_d$ . Движение частицы происходит так, как если бы было только одно магнитное поле, т. е. по спирали. В исходной системе отсчета магнитное поле заставляет частицу равномерно вращаться по спирали. На это вращение накладывается медленное равномерное движение со скоростью  $\mathbf{v}_d$ , определяемой формулой (86.3). Такое движение называется *электрическим дрейфом*.

Величина скорости электрического дрейфа дается выражением  $v_d = cE/B$ . При  $E > B$  это выражение приводило бы к результату  $v_d > c$ , что не имеет смысла. Это показывает, что нерелятивистское рассмотрение справедливо только при выполнении условия  $E \ll B$ , что и предполагалось выше.

Допустим теперь, что постоянное электрическое поле направлено под углом к магнитному. Разложим поле  $\mathbf{E}$  на составляющую  $\mathbf{E}_{\parallel}$  вдоль  $\mathbf{B}$  и на составляющую  $\mathbf{E}_{\perp}$ , перпендикулярную к  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ . Тогда движение частицы представится в виде суперпозиции трех движений: 1) равноускоренного движения в направлении  $\mathbf{B}$  с ускорением  $\mathbf{a}_{\parallel} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_{\parallel}$ ; 2) равномерного вращения по окружности вокруг  $\mathbf{B}$  с угловой скоростью (86.1); 3) электрического дрейфа со скоростью

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{B^2}[\mathbf{E}_{\perp}\mathbf{B}] = \frac{c}{B^2}[\mathbf{E}\mathbf{B}]. \quad (86.3a)$$

Направление и скорость электрического дрейфа не зависят от знака заряда и массы частицы: положительные и отрицательные частицы дрейфуют совершенно одинаково. В результате сложения движений 1) и 2) возникает движение по спирали. Ось спирали направлена параллельно магнитному полю, однако шаг спирали из-за наличия ускорения  $a_{\parallel}$  будет меняться во времени. Такая картина движения сохранится до тех пор, пока скорость частицы из-за наличия того же ускорения не возрастет настолько, что движение перейдет в релятивистское.

5. Заметим еще, что такое же движение в постоянном однородном магнитном поле возникает и в том случае, когда на частицу будет действовать не электрическое поле, а любая постоянная сила  $F$ , например сила тяжести. Роль поля  $E$  будет играть вектор  $F/e$ . В результате возникнет дрейфовое движение со скоростью

$$v_d = \frac{c}{B^2 e} [FB]. \quad (86.4)$$

Однако теперь направление действующей силы  $F$  не зависит от знака заряда частицы, а потому скорости дрейфа положительных и отрицательных частиц будут направлены в противоположные стороны.

### ЗАДАЧА

Исследовать релятивистское движение заряженной частицы в постоянном однородном электрическом поле.

Решение. Движение происходит в плоскости, параллельной электрическому полю  $E$  и начальной скорости частицы  $v_0$ . Примем эту плоскость за координатную плоскость  $XU$ , направив ось  $X$  параллельно полю  $E$ . Тогда уравнения движения можно записать в виде

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0,$$

и, следовательно,

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0 = \text{const},$$

причем за начальный принят момент времени, когда импульс  $p$  направлен параллельно оси  $U$ . Релятивистская масса частицы найдется из соотношения

$$(mc)^2 = (m_0c)^2 + p^2.$$

Используя его, находим уравнения для координат частицы:

$$\sqrt{(m_0c)^2 + p_0^2 + (eEt)^2} \frac{dx}{dt} = eEct,$$

$$\sqrt{(m_0c)^2 + p_0^2 + (eEt)^2} \frac{dy}{dt} = p_0c,$$

или

$$dx = \frac{ct dt}{\sqrt{\tau^2 + t^2}}, \quad dy = \frac{p_0}{eE} \frac{c dt}{\sqrt{\tau^2 + t^2}},$$

где введено обозначение

$$\tau^2 = \frac{(m_0c)^2 + p_0^2}{(eE)^2}. \quad (86.5)$$

После интегрирования получаем

$$x = c \sqrt{\tau^2 + t^2}, \quad y = \frac{\rho_0 c}{eE} \operatorname{arcsch} \frac{t}{\tau}. \quad (86.6)$$

Этими уравнениями и определяется движение. Найдя  $t$  из второго уравнения и подставив в первое, получим уравнение траектории:

$$x = c\tau \operatorname{ch} \frac{eEy}{\rho_0 c}. \quad (86.7)$$

Это — цепная линия. При  $|eEy|/(\rho_0 c) \ll 1$  она, как и следовало ожидать, переходит в параболу

$$x = c\tau \left[ 1 + \frac{eEy}{2(\rho_0 c)^2} \right]. \quad (86.8)$$

### § 87. Дрейф заряженной частицы в неоднородном магнитном поле при наличии слабого электрического поля

1. В общем случае, когда магнитное и электрическое поля неоднородны и меняются во времени, движение частицы приобретает весьма сложный и запутанный характер. Проинтегрировать уравнения движения в аналитической форме в этом случае не удастся. Для расчета движения приходится обращаться к сложным и утомительным численным методам. Есть, однако, случай, когда можно нарисовать сравнительно простую и обозримую картину движения, не обращаясь к численным методам расчета. Это будет тогда, когда магнитное поле сильное, а его изменения в пространстве и во времени происходят медленно. На магнитное поле может накладываться электрическое, но оно должно быть слабым по сравнению с магнитным. При этих условиях задачу можно приближенно решать по методу последовательных приближений.

В нулевом приближении полностью пренебрегают электрическим полем, а также пространственно-временными неоднородностями магнитного поля. Движение частицы представляется как быстрое вращение по ларморовскому кружку, центр которого перемещается вдоль магнитной силовой линии. Электрическое поле и пространственно-временные неоднородности магнитного поля учитываются в первом приближении. Они проявляются в том, что центр ларморовского кружка получает дополнительное медленное движение. Такое движение называется *дрейфом*, а центр самого ларморовского кружка — *ведущим центром* частицы. Параметры движения — циклотронная частота  $\omega$ , радиус ларморовского кружка  $\rho$ , продольная  $v_{\parallel}$  и поперечная  $v_{\perp}$  скорости частицы при этом будут медленно меняться. Медленность означает, что за циклотронный период  $T = 2\pi/\omega$  изменения этих параметров будут малы по сравнению со значениями самих параметров. Для этого необходимо, чтобы на протяжении ларморовского кружка и в течение циклотронного