После интегрирования получаем

$$x = c\sqrt{\tau^2 + t^2}, \qquad y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{arcsh} \frac{t}{\tau}. \tag{86.6}$$

Этими уравнениями и определяется движение. Найдя t из второго уравнения и подставив в первое, получим уравнение траектории:

$$x = c\tau \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c}. \tag{86.7}$$

Это — цепная линия. При $|eEy|/(p_0 c)| \ll 1$ она, как и следовало ожидать, переходит в параболу

$$x = c\tau \left[1 + \frac{eEy}{2(p_0 c)^2}\right]. \tag{86.8}$$

§ 87. Дрейф заряженной частицы в неоднородном магнитном поле при наличии слабого электрического поля

1. В общем случае, когда магнитное и электрическое поля неоднородны и меняются во времени, движение частицы приобретает весьма сложный и запутанный характер. Проинтегрировать уравнения движения в аналитической форме в этом случае не удается. Для расчета движения приходится обращаться к сложным и утомительным численным методам. Есть, однако, случай, когда можно нарисовать сравнительно простую и обозримую картину движения, не обращаясь к численным методам расчета. Это будет тогда, когда магнитное поле сильное, а его изменения в пространстве и во времени происходят медленно. На магнитное поле может накладываться электрическое, но оно должно быть слабым по сравнению с магнитным. При этих условиях задачу можно приближенно решать по методу последовательных приближений.

В нулевом приближении полностью пренебрегают электрическим полем, а также пространственно-временными неоднородностями магнитного поля. Движение частицы представляется как быстрое вращение по ларморовскому кружку, центр которого перемещается вдоль магнитной силовой линии. Электрическое поле и пространственно-временные неоднородности магнитного поля учитываются в первом приближении. Они проявляются в том, что центр ларморовского кружка получает дополнительное медленное движение. Такое движение называется *дрейфом*, а центр самого ларморовского кружка — *ведущим центром* частицы. Параметры движения — циклотронная частота ω, радиус ларморовского кружка ρ, продольная $v_{\parallel}$ и поперечная $v_{\perp}$ скорости частицы при этом будут медленно меняться. Медленность означает, что за циклотронный период $T = 2\pi/\omega$ изменения этих параметров будут малы по сравнению со значениями самих параметров. Для этого необходимо, чтобы на протяжении ларморовского кружка и в течение циклотронного периода магнитное поле изменялось мало. Так как магнитное поле предполагается сильным, то размеры ларморовского кружка будут малы. Быстрые вращения по такому кружку часто не представляют интереса. Чтобы их исключить, достаточно усреднить движение частицы по временам порядка циклотронного периода. Тогда вместо движения самой частицы останется усредненное, или сглаженное, движение ее ведущего центра. Теория, рассматривающая движение частицы в такой постановке, называется *дрейфовой*. За последние два десятилетия дрейфовая теория получила многочисленные применения при анализе движения космических частиц в межзвездных и межпланетных магнитных полях, а также в различного рода магнитных ловушках, предназначенных для удержания и нагрева плазмы с целью получения управляемых термоядерных реакций. Ниже в упрощенной форме излагаются основы дрейфовой теории и ее простейшие результаты.

2. Задача дрейфовой теории — определить скорость плавного движения ведущего центра, обусловленного электрическим полем и пространственно-временными неоднородностями магнитного поля. В силу уравнения Максвелла $\partial \boldsymbol{B}/\partial t = -c \operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ временные неоднородности магнитного поля можно исключить, выразив их через соответствующие пространственные неоднородности поля электрического. Магнитное поле $\boldsymbol{B}$, как уже сказано, предполагается сильным. Величины, пропорциональные $\boldsymbol{B}$, считаются величинами *нулевого порядка*. Это самые большие величины, но в дрейфовую теорию они не входят, так как проявляются только в быстрых вращениях по циклотронным окружностям, которые выпадают в результате усреднения по циклотронным периодам. Члены, пропорциональные электрическому полю и первым пространственным производным магнитного поля, считаются величинами *первого порядка малости*. Влиянием первых и высших производных вектора $\boldsymbol{E}$, вторых и высших производных вектора $\boldsymbol{B}$ будем пренебрегать. В этом приближении скорость плавного движения ведущего центра будет представляться линейной функцией напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ и первых пространственных производных вектора $\boldsymbol{B}$. Понятно, что в принятом приближении все слагаемые этой линейной функции *независимы* и могут быть вычислены *независимо друг от друга*. Изменение магнитного поля в пространстве складывается из изменения его по величине и из изменения по направлению. В соответствии с этим дрейфовое движение ведущего центра можно разложить на три движения: 1) *дрейф под действием электрического поля, или электрический дрейф*, 2) *дрейф, вызванный изменениями магнитного поля только по величине*, 3) *дрейф, вызванный изменениями магнитного поля только по направлению* (т. е. искривлением магнитных силовых линий). Скорости всех этих дрейфов в линейном приближении можно вычислить *независимо*, что и будет сделано ниже.

3. Электрический дрейф. Как выяснено выше, в первом приближении неоднородность электрического поля учитывать не надо. Не надо учитывать и неоднородность магнитного поля, так как она может сказаться на скорости электрического дрейфа лишь во втором приближении. Поэтому можно воспользоваться результатом (86.3а) и для неоднородных полей. Однако в этом случае формула (86.3а) уже не будет точной, а дает скорость электрического дрейфа только в первом приближении.

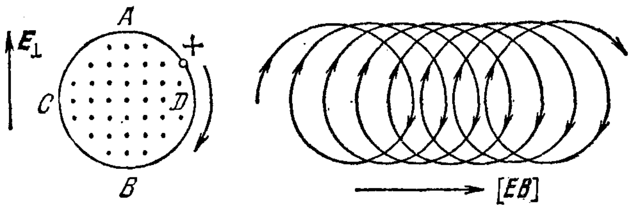

Рис. 215.

Происхождение электрического дрейфа и аналогичного дрейфа, вызванного любой малой возмущающей силой $\boldsymbol{F}$, наложенной на магнитное поле, легко понять из следующих соображений. Предполагая магнитное поле $\boldsymbol{B}$ однородным, рассмотрим проекцию траектории частицы на плоскость, перпендикулярную к этому

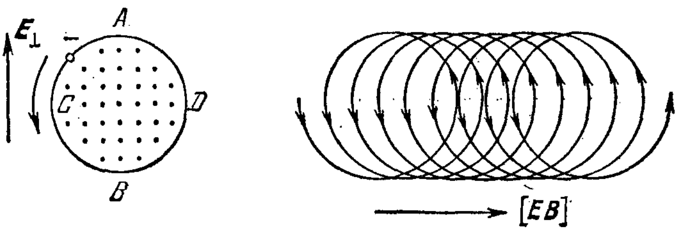

Рис. 216.

полю. Примем эту плоскость за плоскость рисунка, направив магнитное поле к читателю (рис. 215 и 216). В отсутствие электрического поля проекцией траектории частицы будет окружность ларморовского радиуса ρ. Для определенности будем иметь в виду движение положительно заряженной частицы (рис. 215). Наложим теперь электрическое поле, составляющая $E_\perp$ которого направлена вверх. Так как при перемещении частицы вверх поле $E_\perp$ совершает над ней положительную работу, то скорость частицы $v_\perp$ в верхнем положении A будет больше, чем в нижнем положении B. Кроме того, в точке A силы электрического и магнитного полей действуют на частицу в противоположные стороны, а в точке B — в одну и ту же сторону. Оба эти обстоятельства приводят к тому, что радиус кривизны r проекции траектории в верхней части увеличивается, а в нижней уменьшается, как это видно из выражений

$$\frac{1}{r}=\frac{eB}{mv_{\perp}c}-\frac{eE_{\perp}}{mv_{\perp}^{2}} \quad (\text{в точке } A),$$

$$\frac{1}{r}=\frac{mB}{mv_{\perp}c}+\frac{eE_{\perp}}{mv_{\perp}^{2}} \quad (\text{в точке } B).$$

В результате окружность перейдет в незамкнутую кривую, двигаясь по которой проекция частицы будет медленно перемещаться вправо (рис. 215, справа). Это перемещение и есть электрический дрейф. Для отрицательно заряженной частицы аналогичное перемещение представлено на рис. 216. В обоих случаях частица дрейфует вправо, т. е. направление электрического дрейфа, как это и должно быть, *не зависит от знака заряда частицы.*

Скорость электрического дрейфа легко определить из следующих соображений. В положениях C и D (рис. 215) частица движется с одной и той же скоростью v_C, которая больше скорости частицы в нижнем положении B и меньше скорости ее в верхнем положении A на одну и ту же величину u. Величина u и есть скорость электрического дрейфа: $u=v_д$. Действительно, если ввести систему отсчета, движущуюся вправо со скоростью u, то в этой системе скорости частицы в положениях A и B сравняются, и частица будет равномерно вращаться по окружности. Величину u определим из уравнения энергии: $^1/_2\, m\,(v_C+u)^2-{^1/_2}\, mv_C^2=eE_{\perp}\rho$. Подставляя сюда $\rho=mcv_C/(eB)$ и пренебрегая квадратом скорости u, получим

$$v_д=u=\frac{E_{\perp}}{B}c,$$

что совпадает с формулой (86.3а).

4. Дрейф, вызванный изменениями магнитного поля только по величине. Для определения мгновенной скорости дрейфа введем локальную систему отсчета, направив ось Z вдоль магнитного поля $\boldsymbol{B}$. Единичный вектор вдоль $\boldsymbol{B}$ обозначим через $\boldsymbol{h}$. Направление главной нормали N к магнитной силовой линии примем за ось Y. Ось X направим в отрицательную сторону бинормали $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{h}N]$ (рис. 217).

Максимальное изменение величины магнитного поля происходит в направлении главной нормали $\boldsymbol{N}$. В случае, который нас более всего интересует, когда частица движется в области пространства, где не текут электрические токи, поле $\boldsymbol{H}\equiv\boldsymbol{B}$ в направлении N будет возрастать. Для доказательства возьмем в соприкасающейся плоскости две бесконечно близкие магнитные силовые линии BC

и AD и два бесконечно коротких отрезка AB и CD, перпендикулярных к этим силовым линиям (рис. 218). Циркуляция вектора $\boldsymbol{H}$ по бесконечно малому контуру $BCDA$ будет $H_1 l_1 - H_2 l_2$, где l_1 и l_2 — длины сторон BC и AD, а H_1 и H_2 — напряженности магнитного поля на этих сторонах. Так как в отсутствие электрических токов эта циркуляция равна нулю, то магнитное поле H будет больше на более короткой стороне. Отсюда и следует наше утверждение.

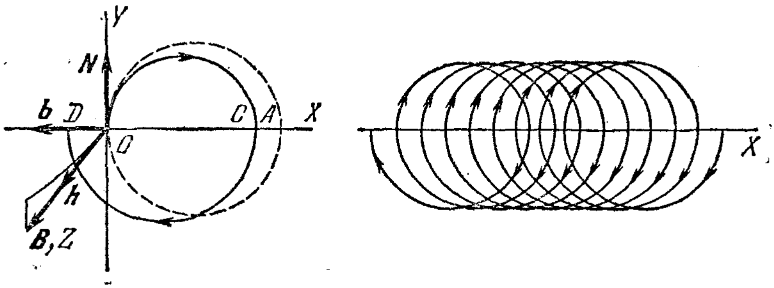

Рис. 217.

Сейчас речь идет о влиянии на скорость дрейфа изменения величины магнитного поля, но не его направления. Поэтому можно отвлечься от кривизны магнитных силовых линий и считать их прямолинейными. Можно также отвлечься от наличия продольной составляющей скорости $\boldsymbol{v}_{\parallel}$, так как движение вдоль магнитного поля не влияет на силы, действующие на частицу. Иными словами, во всех промежуточных расчетах под $\boldsymbol{v}$ следует понимать поперечную скорость $\boldsymbol{v}_{\perp}$. Ради краткости опустим всюду значок $\perp$, за исключением окончательных формул, в которых поперечная скорость по-прежнему будет обозначаться через $\boldsymbol{v}_{\perp}$. Кроме того, во всех промежуточных расчетах заряд частицы e будем считать положительным.

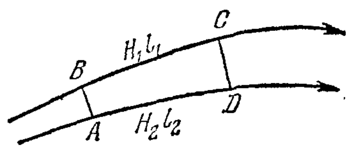

Рис. 218.

Положительно заряженная частица будет вращаться по часовой стрелке, как указано на рис. 217. Выйдя из точки O, частица двигалась бы по окружности радиуса $\rho = v/\omega_B$, если бы магнитное поле $\boldsymbol{B}$ было постоянно. Эта окружность изображена на рис. 217 пунктиром. Она пересекает ось X в точке A на расстоянии $OA = 2\rho$ от точки O. В действительности магнитное поле, а с ним и кривизна траектории возрастают с возрастанием координаты y. Поэтому частица вернется к оси X в какой-то точке C, расположенной левее A. При движении в нижней половине плоскости XY, наоборот, кривизна траектории будет меньше, а потому частица пересечет ось X в точке D, расположенной левее O. Таким образом, за один оборот положительно заряженная частица сместится влево на отрезок OD. Отрицательно заряженная частица сместилась бы в противоположном направлении. При медленном изменении магнитного поля в пространстве траектория частицы за один оборот мало отличается от окружности, и смещение OD будет мало по сравнению с радиусом ρ. Путь частицы за время многих оборотов изображен на рис. 217 справа. Частица быстро вращается по окружности, центр которой медленно перемещается параллельно оси X. Такое перемещение и есть дрейф.

Найдем теперь скорость дрейфа $v_д$, усреднив движение частицы по быстрому ларморовскому вращению. Уравнение движения частицы $\dot{\boldsymbol{v}} = [\boldsymbol{v}\omega_B]$ запишем в координатной форме:

$$\dot{v}_x = v_y\omega_B, \qquad \dot{v}_y = -v_x\omega_B.$$

Поскольку дрейф происходит параллельно оси X и отсутствует в направлении оси Y, скорость дрейфа $v_д = \bar{v}_x$ найдется из требования, что среднее значение v_y, а следовательно, и $\dot{v}_y = -v_x\omega_B$ равно нулю, т. е. $\overline{v_x\omega_B} = 0$. Разложим ω_B в ряд по степеням y и оборвем это разложение на линейном члене:

$$\omega_B = \omega_0 + \left(\frac{d\omega_B}{dy}\right)_{y=0} y.$$

Тогда

$$\bar{v}_x\omega_0 + \frac{d\omega_B}{dy}\overline{yv_x} = 0.$$

Так как величина $d\omega_B/dy$ предполагается малой, то среднее значение произведения $yv_x = y\dot{x}$ достаточно вычислить в нулевом приближении, т. е. считать при вычислении, что частица вращается по окружности

$$x = \rho\cos\omega_0 t, \qquad y = -\rho\sin\omega_0 t.$$

Тогда

$$\overline{y\dot{x}} = \rho^2\omega_0\overline{\sin^2\omega_0 t} = \frac{1}{2}\rho^2\omega_0,$$

и, следовательно,

$$v_д = \bar{v}_x = -\frac{\rho^2}{2}\frac{d\omega_B}{dy}.$$

В векторной форме:

$$\boldsymbol{v}_д = \frac{\rho^2}{2}\frac{d\omega_B}{dy}\boldsymbol{b}, \tag{87.1}$$

или с учетом соотношений $\rho = v/\omega_B$ и $\omega_B = eB/(mc)$

$$\boldsymbol{v}_д = \frac{mcv_\perp^2}{2eB^2}\frac{\partial B}{\partial N}\boldsymbol{b}. \tag{87.2}$$

В этом виде формула верна и для положительно заряженной, и для отрицательно заряженной частицы. *Положительно заряженная частица дрейфует в положительном направлении бинормали к магнитной силовой линии, отрицательно заряженная — в отрицательном направлении.*

Придадим теперь формуле (87.2) более наглядную геометрическую форму, предполагая, что пространство, в котором движется частица, свободно от электрических токов. Имея в виду, что поле $\boldsymbol{B}$

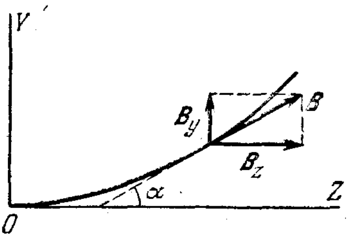

Рис. 219.

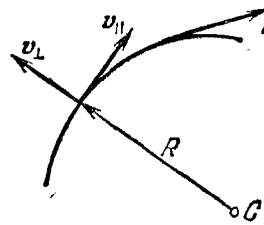

Рис. 220.

в рассматриваемой точке направлено вдоль оси Z, запишем формулу (87.2) в виде

$$\boldsymbol{v}_{д} = \frac{mcv_\perp^2}{2eB^2}\frac{\partial B_z}{\partial y}\boldsymbol{b}.$$

Так как при отсутствии электрических токов $\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = 0$, то $\partial B_z/\partial y = \partial B_y/\partial z$, и, следовательно,

$$\boldsymbol{v}_{д} = \frac{mcv_\perp^2}{2eB^2}\frac{\partial B_y}{\partial z}\boldsymbol{b}.$$

Как видно из рис. 219, $\operatorname{tg}\alpha = B_y/B_z$, где α — угол между касательной к магнитной силовой линии и осью Z. В начале координат O касательная горизонтальна, а потому в его малой окрестности $\operatorname{tg}\alpha$ можно заменить на α. По той же причине дифференцирование по дуге магнитной силовой линии можно заменить дифференцированием по координате z. Радиус кривизны R силовой линии определяется соотношением

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B_y}{B_z}\right) = \frac{1}{B_z}\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{B_y}{B_z^2}\frac{\partial B_z}{\partial z},$$

или $1/R = \dfrac{1}{B}\dfrac{\partial B_y}{\partial z}$, так как в точке O $B_z = B$, $B_y = 0$. В результате получается

$$\boldsymbol{v}_{д} = \frac{mcv_\perp^2}{2eBR}\boldsymbol{b}. \qquad (87.3)$$

5. Дрейф, вызванный искривлением магнитных силовых линий. Для расчета скорости этого дрейфа введем локальную систему отсчета, вращающуюся вокруг центра кривизны C магнитной силовой линии (рис. 220). Ось вращения направим параллельно бинормали $\boldsymbol{b}$ этой силовой линии (она перпендикулярна к плоскости рисунка). Величину угловой скорости вращения $\boldsymbol{\Omega}$ определим из условия $\boldsymbol{v}_{\parallel} = [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{R}]$. Тогда в рассматриваемой локальной системе отсчета частица будет иметь только поперечную скорость $\boldsymbol{v}_{\perp}$, которая играет роль относительной скорости $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$. При рассмотрении движения в локальной системе отсчета к действующим силам надо добавить две силы инерции: кориолисову и центробежную. Силу инерции, вызванную неравномерностью вращения, учитывать не надо, так как она может влиять на дрейф частицы лишь во втором или высшем порядке малости. Кориолисова сила инерции $2m\,[\boldsymbol{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\Omega}] = 2m\Omega\,[\boldsymbol{v}_{\perp}\boldsymbol{b}]$ направлена вдоль силовой линии, а потому она будет изменять только продольную составляющую $v_{\parallel}$ скорости $\boldsymbol{v}$. Центробежная сила инерции $mv_{\parallel}^2\boldsymbol{R}/R^2$ вызовет дрейф в перпендикулярном направлении. Скорость этого дрейфа, согласно формуле (86.4), определяется выражением

$$\boldsymbol{v}_{\text{д}} = \frac{c}{B^2e}\left[\frac{mv_{\parallel}^2}{R^2}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{B}\right] = -\frac{mcv_{\parallel}^2}{BeR}[\boldsymbol{N}\boldsymbol{h}].$$

Если $\boldsymbol{N}$ — единичный вектор главной нормали к магнитной силовой линии, то $\boldsymbol{R} = -R\boldsymbol{N}$. Поэтому, полагая в последнем соотношении $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{h}$ и учитывая, что $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{h}\boldsymbol{N}]$, получим

$$\boldsymbol{v}_{\text{д}} = \frac{mcv_{\parallel}^2}{BRe}\boldsymbol{b}. \tag{87.4}$$

Поскольку дрейф, выражаемый этой формулой, вызывается центробежной силой инерции, он называется *центробежным дрейфом.*

6. Теперь можно обратиться к общему случаю, т. е. к случаю произвольного электромагнитного поля, для которого справедливо дрейфовое приближение. Так как все дрейфы, которые были рассмотрены, в первом приближении независимы, то в общем случае их надо просто сложить. Таким путем для скорости сглаженного движения ведущего центра в пространстве, где не текут электрические токи, получаем

$$\boldsymbol{V} = v_{\parallel}\boldsymbol{h} + \frac{c}{B^2}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}] + \frac{mc}{eBR}\left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2\right)\boldsymbol{b}. \tag{87.5}$$

Здесь произведены небольшие изменения в обозначениях. Под $\boldsymbol{h}$ мы теперь понимаем единичный вектор касательной к магнитной силовой линии, проходящей *через ведущий центр*, а не через саму частицу. Величины же $v_{\parallel}$ и $v_{\perp}$ означают *усредненные скорости* частицы вдоль этого *нового вектора* $\boldsymbol{h}$ и перпендикулярно к нему. Точно так же значения полей $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$ мы берем *в точке нахождения* *ведущего центра*, а не частицы. Такая замена совершенно не затрагивает все слагаемые в правой части формулы (87.5), за исключением первого, так как она меняет эти слагаемые только в первом или высшем порядке малости. Но эта замена существенна для слагаемого $v_{\parallel}\boldsymbol{h}$, так как она нулевого порядка малости. Если бы сохранить прежний смысл вектора $\boldsymbol{h}$, то в это слагаемое надо было бы ввести поправку первого порядка малости. Если же понимать $\boldsymbol{h}$ в новом смысле, как мы сделали, то такая поправка не нужна.

Итак, *в сильном, но слабо неоднородном магнитном поле при наличии слабого электрического поля заряженная частица быстро вращается по ларморовской окружности. Центр ларморовской окружности движется вдоль магнитной силовой линии со скоростью $v_{\parallel}$ и испытывает дрейф перпендикулярно к магнитному полю. Дрейф вызывается электрическим полем и неоднородностями магнитного поля. Скорость электрического дрейфа определяется выражением $\frac{c}{B^2}[\boldsymbol{EB}]$. Направление этого дрейфа не зависит от знака заряда частицы. Дрейф, вызываемый неоднородностями магнитного поля, происходит в направлении бинормали к магнитной силовой линии, причем положительно заряженные частицы дрейфуют в положительном направлении бинормали, а отрицательно заряженные — в противоположном направлении. Скорость этого «магнитного» дрейфа определяется выражением* $\frac{mc}{eBR}\left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2\right)\boldsymbol{b}$.

§ 88. Адиабатический инвариант

1. При движении заряженной частицы в неоднородном магнитном поле или при изменении самого магнитного поля ларморовский радиус частицы ρ, а также ее поперечная скорость $v_{\perp}$ изменяются. Исследуем характер этого изменения, предполагая, что магнитное поле слабо неоднородно и меняется во времени медленно.

Рассмотрим сначала случай, когда частица движется перпендикулярно к магнитному полю $\boldsymbol{B}$, а само поле $\boldsymbol{B}$ однородно и меняется только во времени. Предположим, что электрического поля нет, за исключением поля, обусловленного изменениями $\boldsymbol{B}$ во времени. В этих условиях дрейф частицы отсутствует, как это видно из формулы (87.5). Если бы магнитное поле было постоянно, то частица двигалась бы по окружности радиуса $\rho = v/\omega$. При изменении магнитного поля траектория частицы перестает быть замкнутой. Однако если магнитное поле меняется медленно, то за циклотронный период $T = 2\pi/\omega$ отклонения траектории от окружности будут малы. Переменное магнитное поле индуцирует поле электрическое. Вследствие этого ларморовский радиус ρ и скорость частицы v изменяются в соответствии с уравнением $m\dot{v} = eE_s$, где E_s — проекция электрического поля $\boldsymbol{E}$ на направление траектории. Изменениями величины E_s за циклотронный период можно пренебречь, а ввиду