

ведущего центра, а не частицы. Такая замена совершенно не затрагивает все слагаемые в правой части формулы (87.5), за исключением первого, так как она меняет эти слагаемые только в первом или высшем порядке малости. Но эта замена существенна для слагаемого $v_{\parallel} \mathbf{h}$, так как она нулевого порядка малости. Если бы сохранить прежний смысл вектора \mathbf{h} , то в это слагаемое надо было бы ввести поправку первого порядка малости. Если же понимать \mathbf{h} в новом смысле, как мы сделали, то такая поправка не нужна.

Итак, в сильном, но слабо неоднородном магнитном поле при наличии слабого электрического поля заряженная частица быстро вращается по ларморовской окружности. Центр ларморовской окружности движется вдоль магнитной силовой линии со скоростью v_{\parallel} и испытывает дрейф перпендикулярно к магнитному полю. Дрейф вызывается электрическим полем и неоднородностями магнитного поля. Скорость электрического дрейфа определяется выражением $\frac{c}{B^2} [E\mathbf{B}]$. Направление этого дрейфа не зависит от знака заряда частицы. Дрейф, вызываемый неоднородностями магнитного поля, происходит в направлении бинормали к магнитной силовой линии, причем положительно заряженные частицы дрейфуют в положительном направлении бинормали, а отрицательно заряженные — в противоположном направлении. Скорость этого «магнитного» дрейфа определяется выражением $\frac{mc}{eBR} (v_{\parallel}^0 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2) \mathbf{b}$.

§ 88. Адиабатический инвариант

1. При движении заряженной частицы в неоднородном магнитном поле или при изменении самого магнитного поля ларморовский радиус частицы ρ , а также ее поперечная скорость v_{\perp} изменяются. Исследуем характер этого изменения, предполагая, что магнитное поле слабо неоднородно и меняется во времени медленно.

Рассмотрим сначала случай, когда частица движется перпендикулярно к магнитному полю \mathbf{B} , а само поле \mathbf{B} однородно и меняется только во времени. Предположим, что электрического поля нет, за исключением поля, обусловленного изменениями \mathbf{B} во времени. В этих условиях дрейф частицы отсутствует, как это видно из формулы (87.5). Если бы магнитное поле было постоянно, то частица двигалась бы по окружности радиуса $\rho = v/\omega$. При изменении магнитного поля траектория частицы перестает быть замкнутой. Однако если магнитное поле меняется медленно, то за циклотронный период $T = 2\pi/\omega$ отклонения траектории от окружности будут малы. Переменное магнитное поле индуцирует поле электрическое. Вследствие этого ларморовский радиус ρ и скорость частицы v изменяются в соответствии с уравнением $m\dot{v} = eE_s$, где E_s — проекция электрического поля \mathbf{E} на направление траектории. Изменениями величины E_s за циклотронный период можно пренебречь, а ввиду

пезначительности отклонения траектории от ларморовской окружности вместо E_s можно взять проекцию вектора \mathbf{E} на направление ларморовской окружности (последняя на рис. 221 изображена пунктиром). Тогда E_s определится из уравнения

$$\oint E_s ds = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi \rho^2}{c} \frac{dB}{dt}.$$

Здесь производная $d\Phi/dt$ взята с плюсом, а не с минусом, так как речь идет о проекции на направление движения частицы, а оно при $e > 0$ противоположно положительному направлению обхода контура. Написанное уравнение дает

$$E_s = \frac{\rho}{2c} \frac{dB}{dt} = \frac{mv}{2eB} \frac{dB}{dt}.$$

Уравнение движения частицы переходит в

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{mv}{2B} \frac{dB}{dt}.$$

Отсюда после интегрирования получим

$$\frac{v^2}{B} = \text{const.}$$

Таким образом, величина v^2/B при движении частицы сохраняется неизменной. Однако это справедливо только при *медленных изменениях* магнитного поля, т. е. величина v^2/B является не точным интегралом движения, а *адиабатическим инвариантом*.

Если у частицы есть продольная скорость $v_{||}$, то эта скорость не окажет никакого влияния на поперечное движение. В нашем рассуждении полную скорость v надо просто заменить ее поперечной составляющей v_{\perp} , что дает

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = \text{const.} \quad (88.1)$$

Адиабатическим инвариантом будет величина v_{\perp}^2/B .

2. Рассмотрим теперь случай, когда магнитное поле, в котором движется частица, постоянно, но слабо неоднородно. Допустим, что дрейф в боковом направлении отсутствует, т. е. ведущий центр частицы движется вдоль магнитной силовой линии. Последнюю ради простоты будем считать прямолинейной (она на рис. 222 изображена пунктиром). Частица может двигаться как в сторону схождения, так и в сторону расхождения магнитных силовых линий. При движении на частицу действует сила Лорентца $\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]$. Она имеет слагающую вдоль центральной силовой линии. Эта слагающая будет замедлять продольное движение частицы, если оно происходит в направлении схождения магнитных силовых линий, и ускорять в противоположном случае. А так как полная

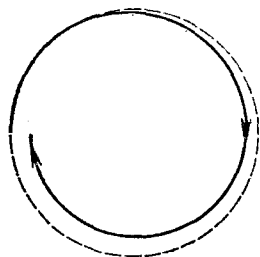


Рис. 221.

кинетическая энергия частицы сохраняется, то возрастание продольной скорости v_{\parallel} будет сопровождаться убыванием поперечной v_{\perp} , и наоборот. Покажем, что при этом соотношение (88.1) остается справедливым. Для этого достаточно перейти к системе отсчета, движущейся со скоростью v_{\parallel} . Поступательная сила инерции $-m\dot{v}_{\parallel}$, появляющаяся в этой системе, параллельна магнитному полю B , а потому не оказывает никакого влияния на скорость дрейфа. Однако в движущейся системе отсчета магнитное поле B становится переменным, и к нему полностью применимы рассуждения, которыми мы пользовались при доказательстве формулы (88.1).

3. Допустим теперь, что есть дрейф в поперечном направлении со скоростью v_d . Этот дрейф может вызываться либо электрическим полем, либо неоднородностями магнитного поля, либо и тем и другим. Он может вызываться и любыми другими силами. Для последующего изложения все это не имеет никакого значения. Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью v_d . Силой инерции $-m\dot{v}_d$ в этом случае можно пренебречь, как величиной второго или высшего порядка малости. После этого рассматриваемый случай сведется к уже рассмотренным. Отсюда следует, что адиабатическим инвариантом будет величина $v_{\perp}'^2/B$, где v' — скорость частицы в движущейся системе отсчета. Но v_{\perp}' есть скорость вращения частицы по ларморовской окружности, если отвлечься от дрейфового движения последней и от движения вдоль магнитной силовой линии. Таким образом, адиабатическая инвариантность $v_{\perp}'^2/B$ сохраняется, если понимать под v_{\perp} скорость вращения частицы по ларморовской окружности в только что указанном смысле.

4. Частица, вращающаяся по ларморовскому кружку, обладает магнитным моментом \mathfrak{M} , величина которого, как легко вычислить, равна $mv_{\perp}'^2/(2B)$. Этот момент направлен против поля независимо от знака заряда частицы, а потому в векторной форме

$$\mathfrak{M} = -\frac{mv_{\perp}'^2}{2B} \mathbf{h}. \quad (88.2)$$

Аналогично, магнитный поток через ларморовский кружок равен

$$\Phi = \pi \frac{m^2 c^2 v_{\perp}'^2}{e^2 B}. \quad (88.3)$$

С учетом соотношения (88.1) отсюда следует, что обе величины \mathfrak{M} и Φ являются адиабатическими инвариантами.

5. С адиабатической инвариантностью величины (88.1) связано явление *отражения заряженных частиц от областей сильного магнитного поля*. Пусть магнитное поле не меняется во времени,

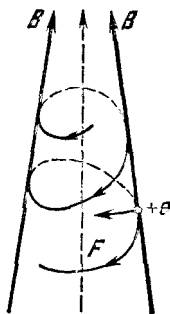


Рис. 222.

а частица движется в сторону схождения магнитных силовых линий. Тогда, как было выяснено в пункте 2, ее продольная скорость будет уменьшаться, а поперечная — увеличиваться. Если v — полная скорость, а α — угол наклона ее к магнитной силовой линии, то $v_{\perp} = v \sin \alpha$. А так как при движении в постоянном магнитном поле величина скорости v не изменяется, то из (88.1) следует

$$\frac{\sin^2 \alpha}{B} = \frac{\sin^2 \alpha_0}{B_0} = \text{const.} \quad (88.4)$$

Здесь индексом нуль обозначены значения B и α в каком-либо положении частицы, условно принимаемом за исходное. Из полученного соотношения следует, что в область, определяемую условием $B > B_0 / \sin^2 \alpha_0$, частица проникнуть не может, так как в противном случае $|\sin \alpha|$ должен был бы превзойти единицу. По мере продвижения в область более сильного поля угол α будет возрастать. Если при этом он все время остается меньше 90° , то частица будет продолжать движение вперед. Это будет тогда, когда для всех точек траектории выполняется условие

$$\sin \alpha_0 < \sqrt{B_0/B}. \quad (88.5)$$

Если же угол α в некоторой точке достигает 90° , то частица начнет двигаться в обратном направлении, т. е. отразится. Явление напоминает полное отражение света в оптике. Точка, где произойдет отражение, определяется уравнением

$$\sin \alpha_0 = \sqrt{B_0/B}. \quad (88.6)$$

6. В связи с изложенным уместно упомянуть о проблеме *управляемых термоядерных реакций*. Легкие атомные ядра при определенных условиях могут соединяться между собой с выделением энергии в несколько МэВ или десятков МэВ на каждую ядерную реакцию. Таковы, например, реакции соединения ядер дейтерия друг с другом или с ядрами трития. По энергovyделению такие реакции в миллионы раз превосходят обычные химические реакции. В естественных условиях они идут в недрах звезд, а искусственно осуществляются в водородных бомбах. Но в водородных бомбах реакции синтеза атомных ядер носят взрывной, неуправляемый характер. Заманчивой является идея, интенсивно разрабатываемая во всех передовых странах мира, придать этим реакциям спокойный, управляемый характер. Если бы это удалось сделать, то человечество получило бы практически неисчерпаемый источник энергии, так как запасы дейтерия на Земле достаточно велики. (На каждые 5000—6000 атомов водорода в Мировом океане приходится один атом дейтерия.) Для того чтобы легкие атомные ядра начали интенсивно реагировать друг с другом, вещество необходимо нагреть до температуры 10 кэВ и выше. При таких температурах вещество переходит в состояние *полностью ионизованной плазмы*, состоящей из элек-

тронов и голых атомных ядер. Плазму необходимо получить, нагреть, изолировать от стенок камеры, в которой она находится, удерживая ее в таком состоянии в течение времени, достаточного для того, чтобы большая часть ядер успела вступить в ядерные реакции. Для этой цели предлагались различные ловушки, в которых плазма должна удерживаться в течение необходимого времени магнитными полями.

Проблема управляемого термоядерного синтеза сначала начала разрабатываться в СССР в 1951 г., а затем в США и в других промышленно развитых странах. Сначала в качестве ловушки предполагалось использовать магнитное поле внутри тороидальной катушки (см. рис. 151). Такое поле вынуждает частицы плазмы двигаться вдоль магнитных силовых линий, имеющих форму коаксиальных окружностей, центры которых расположены на

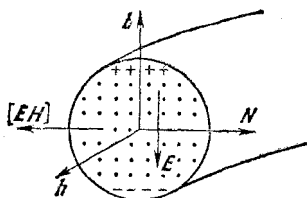


Рис. 223.

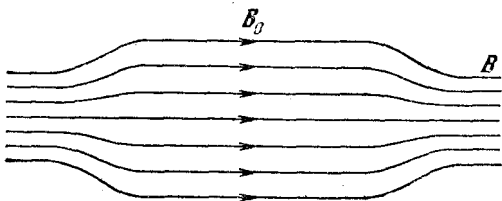


Рис. 224.

геометрической оси тора. Однако тороидальное магнитное поле возрастает в направлении к указанной оси. Вследствие этого положительно заряженные частицы дрейфуют в направлении бинормали \mathbf{b} , а отрицательно заряженные — в противоположном направлении. Плазма поляризуется, и возникает электрическое поле, направленное вниз (рис. 223). Теперь появляется электрический дрейф. Так как его направление не зависит от знака заряда частицы, то он приводит к тому, что плазма в целом отбрасывается к наружной стенке тороидальной камеры. В таком виде описанное устройство еще не может служить магнитной ловушкой. Мы не можем здесь входить в подробности, как этот «тороидальный дрейф» компенсируется в современных термоядерных установках — *стеллараторах* и *токамаках*, из которых последние в настоящее время считаются наиболее перспективными при решении проблемы управляемого термоядерного синтеза.

Упомянем только о другой магнитной ловушке, основанной на идеях настоящего параграфа. Это — *открытая ловушка*, схема которой представлена на рис. 224. Магнитное поле создается прямолинейной катушкой. В центральной части ловушки оно почти однородно и равно B_0 . На краях с помощью дополнительных кату-

шек магнитное поле усиливается до максимального значения B . Области усиленного магнитного поля называются *магнитными зеркалами* или *магнитными пробками*. Ловушка удерживает только такие частицы, которые удовлетворяют условию

$$\sin \alpha_0 > \sqrt{B_0/B}. \quad (88.7)$$

Такие частицы, отражаясь от магнитных зеркал, совершают финитное движение, пока из-за взаимодействия с другими частицами не нарушится условие (88.7). Если же угол α_0 удовлетворяет условию (88.5), то частицы ловушкой удерживаться не могут. Конус, определяемый уравнением (88.6), называется *конусом потерь*. Ловушка удерживает только такие частицы, направления движения которых (в области однородного поля) лежат в пределах «конуса потерь». Все прочие частицы уходят из ловушки.

Ограничимся этими отрывочными замечаниями. Управляемый термоядерный синтез — это большая нерешенная проблема, с которой можно ознакомиться по книге Л. А. Арцимовича «Управляемые термоядерные реакции».

7. Заметим в заключение, что земное магнитное поле играет роль магнитной ловушки космического масштаба, аналогичной открытой ловушке, изображенной на рис. 224. Магнитное поле Земли минимально на экваторе и максимально вблизи магнитных полюсов. Заряженная частица, если только направление ее движения не попадет в «конус потерь», будет совершать колебательное движение вдоль магнитной силовой линии, испытывая отражения вблизи магнитных полюсов и медленно дрейфуя в восточном или западном направлении. Частица окажется «запертой», поскольку ее движение ограничено определенной областью вокруг земного шара. Частицы высоких энергий постоянно образуются в верхних слоях атмосферы в результате ядерных реакций, происходящих под действием космических лучей. Некоторые из этих частиц покидают околоземное пространство, другие оказываются запертыми. Так образуются вокруг Земли *радиационные пояса*, обнаруженные в 1958 г. Ван-Алленом и С. Н. Верновым (р. 1910) в результате исследований, выполненных с помощью искусственных спутников. Эти исследования показали, что наша планета, помимо газообразной оболочки, окружена слоями заряженных частиц большой энергии, которые и называются радиационными поясами. По современным данным, существуют два электронных пояса и один протонный, в значительной степени перекрывающиеся между собой. Протонный и внутренний электронный пояса начинаются на высоте примерно 1000 км над земной поверхностью. Максимум концентрации протонного пояса удален от центра Земли примерно на три земных радиуса. Энергия протонов меняется примерно от 40 МэВ на внутренней границе пояса до 0,5 МэВ во внешних зонах. Максимум концентрации внутреннего электронного пояса удален от центра Земли при-

мерно на полтора, а максимум концентрации внешнего \sim на пять земных радиусов.

Посмотрим теперь, насколько правомерно применять к движению частиц в радиационных поясах дрейфовую теорию. Примем ориентировочно, что магнитное поле в пределах радиационного пояса $B \sim 0,1$ Гс. Тогда для протонов с энергией $\mathcal{E} = 1$ МэВ ларморовский радиус будет

$$\rho_{\text{п}} \approx \frac{v}{\omega_{\text{п}}} = \frac{V 2\mathcal{E}m_{\text{п}}c^2}{|e|B} \sim 10 \text{ км.}$$

Для электронов, движущихся со скоростями, близкими к скорости света, надо применять релятивистскую формулу. В случае электронов той же энергии \mathcal{E} она дает

$$\rho_{\text{эл}} = \frac{c}{\omega_{\text{эл}}} = \frac{m_{\text{эл}}c^2}{|e|B} = \frac{\mathcal{E} + m_{\text{эл}}c^2}{|e|B} \sim 0,3 \text{ км.}$$

Приближенно земное магнитное поле можно рассматривать как поле диполя. Оно меняется обратно пропорционально кубу расстояния от центра Земли: $B \sim \text{const}/r^3$. Отсюда $|\Delta B/B| \sim 3\Delta r/r$. Полагая $\Delta r = \rho$, получаем

$$\Delta B/B \sim \rho/r,$$

т. е. $|\Delta B/B| \sim 10^{-3}$ для протонов и $\sim 10^{-4}$ для электронов. Таким образом, несмотря на сравнительную слабость магнитного поля Земли, размеры ларморовских кружков протонов и электронов пренебрежимо малы по сравнению с радиусом земного шара, причем на протяжении таких размеров магнитное поле меняется мало. Этого достаточно, чтобы к движению отдельной частицы можно было применять дрейфовую теорию и рассматривать его как адиабатическое движение.

Остается выяснить влияние концентрации заряженных частиц. Для этого надо оценить длину свободного пробега частицы λ . Однако в плазме из-за медленности убывания кулоновских сил с расстоянием траектория частицы не состоит из прямолинейных звеньев с резкими изломами, как это имеет место в случае нейтральных газов. Скорее она имеет вид извилистой линии с непрерывно меняющейся кривизной. Изменения направления движения на конечные углы накапливаются непрерывно. Поэтому о средней длине свободного пробега можно говорить лишь условно. Роль величины λ играет среднее расстояние, которое должна пройти частица, чтобы направление ее движения изменилось на угол $\sim 90^\circ$. Мы не можем здесь останавливаться на выводе выражения для λ . Ограничимся приведением численного результата. Концентрация в радиационных поясах не превышает нескольких заряженных частиц в 1 см^3 . Примем ориентировочно $n \sim 10 \text{ см}^{-3}$. Тогда для частицы с энер-

гией ~ 1 МэВ оценка дает $\lambda \sim 10^{20}$ см, что в 10^{11} раз превышает размеры земного шара. Это показывает, что столкновения с другими частицами не препятствуют частице громадное число раз претерпеть отражения вблизи магнитных полюсов, прежде чем она попадет в конус потерь и покинет земное магнитное поле.

§ 89. Определение удельного заряда частицы

1. *Удельным зарядом частицы* называется отношение заряда e этой частицы к ее массе m . При определении этого отношения заряд e принято выражать в единицах СГСМ, а массу m — в граммах. В соответствии с этим в настоящем параграфе применяется система СГСМ. Удельный заряд можно определить, исследуя движение частицы в поперечных электрическом и магнитном полях. Такие исследования производились Дж. Дж. Томсоном и его сотрудниками в конце прошлого и начале настоящего столетия с целью установления природы катодных и анодных лучей в трубках

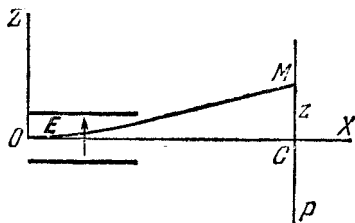


Рис. 225.

с разреженными газами (давление порядка нескольких сотых мм рт. ст.). Они привели к открытию *электрона* и *изотопов*, т. е. химических элементов, ядра которых имеют одинаковые заряды, но различные массы.

2. Исследуем сначала движение частицы в поперечном электрическом поле заряженного конденсатора. Направим ось X параллельно пластинам конденсатора, а ось Z — перпендикулярно. Пусть частица перед входом в конденсатор двигалась вдоль оси X (рис. 225). В дальнейшем под действием электрического поля конденсатора она отклонится в направлении оси Z и будет двигаться в плоскости ZX . Уравнения движения частицы имеют вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = eE_x, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = eE_z. \quad (89.1)$$

Будем предполагать, что угол наклона траектории частицы к оси X на протяжении всего движения мал и, следовательно, $v_z \ll v_x$. В этом случае величиной v_z^2 можно пренебречь по сравнению с v_x^2 и написать $v_x = (v^2 - v_z^2)^{1/2} \approx v [1 - 1/2 (v_z/v)^2] \approx v$, где v — полная скорость частицы. В том же приближении скорость v можно считать постоянной, а движение параллельно оси X — равномерным. Исключив время t с помощью соотношения $dx = v dt$, получим уравнение траектории в дифференциальной форме:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{e}{mv^2} E_z. \quad (89.2)$$