

электронами, будет равен по величине и противоположен по знаку моменту количества движения, приобретенному ионами кристаллической решетки. Отсюда следует, что при изменении тока \mathcal{I} решетка приобретает момент количества движения $\Delta L_p = -\Delta L_s = -\frac{m}{e} lr \Delta \mathcal{I}$.

Пусть изменение тока производится настолько быстро, что за время одного колебания катушка не успевает повернуться на заметный угол. Тогда можно считать, что угловая скорость решетки $\dot{\phi}$ при крутильных колебаниях изменяется в соответствии с уравнением $\Theta \Delta \dot{\phi} = \Delta L_p$, где Θ — момент инерции катушки относительно ее геометрической оси. Пусть изменение тока произошло в момент, когда катушка проходила через положение равновесия. В этот момент $\dot{\phi} \equiv \omega a \cos \omega t = \omega a$. Поэтому амплитуда колебаний a получит приращение, определяемое уравнением $\Theta \omega \Delta a = \Delta L_p$. Фактически в опыте производилось изменение на противоположное направления тока, так что $\Delta \mathcal{I} = -2\mathcal{I}$, и, следовательно,

$$\Delta a = \frac{\Delta L_p}{\Theta \omega} = \frac{2mlr}{e\Theta \omega} \mathcal{I} = \frac{mlrT}{\pi e\Theta} \mathcal{I}, \quad (97.4)$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период крутильных колебаний катушки. На опыте измерялась величина Δa с помощью специального очень чувствительного устройства, которое мы не описываем.

Ввиду малости эффекта и необходимости защитить прибор от возмущений, значительно превосходящих самый эффект, опыт очень труден. Однако он был поставлен с использованием современной аппаратуры и притом настолько тщательно и в таких хороших условиях, что результаты получились весьма устойчивые. Опыт производился на специальной станции, расположенной вдали от дорог. Чувствительная часть прибора располагалась в идеально темном подвале, в котором поддерживалась постоянная температура и не было никаких потоков воздуха. В подвале были расположены три взаимно перпендикулярные системы катушек с общим центром. Они использовались для компенсации и контролирования различных составляющих земного магнитного поля. Наблюдатель делал отсчеты, находясь в верхнем помещении, при помощи особой системы телеуправления. Опыт производился с катушками из медной и алюминиевой проволок. Измеренное среднее значение удельного заряда e/m отличалось от общепринятого всего на 0,2%.

§ 98. Явление Холла

1. Если исходить из модели «свободных» электронов (см. § 42), то плотность электрического тока в металле может быть выражена через их концентрацию n и подвижность по формуле

$$\mathbf{j} = enb\mathbf{E}. \quad (98.1)$$

Формула была бы справедлива и в том случае, если бы носителями

тока были положительно заряженные частицы ($e > 0$). Если $e > 0$, то ток \mathbf{j} направлен по полю \mathbf{E} ; если же $e < 0$, то он направлен противоположно полю \mathbf{E} . Для определения двух величин n и b к уравнению (98.1) необходимо присоединить второе уравнение. С этой целью можно воспользоваться *эффектом Холла* (1855—1938).

Допустим, что вдоль длинной и тонкой металлической ленты течет постоянный ток с плотностью \mathbf{j} . Направление этого тока примем за ось X (рис. 235). Пусть перпендикулярно к плоскости ленты приложено постоянное однородное магнитное поле \mathbf{B} , направленное вдоль оси Z . Если бы носителями тока были положительные частицы, то они двигались бы вместе с током вправо и сила Лорентца $\frac{e}{c} [\mathbf{vB}]$ отклоняла бы их вниз. Нижний край ленты стал бы заряжаться положительно, а верхний — отрицательно. Возникшее электрическое поле E_y препятствовало бы отклонению, вызываемому магнитным полем. Процесс накопления зарядов на нижнем и верхнем краях ленты продолжался бы до тех, пока не прекратилось бы течение зарядов поперек ленты. После этого поперек ленты между противоположными точками 1 и 2 установится положительная разность потенциалов $V_1 - V_2$. Если носителями тока являются отрицательные частицы, то вместе с током они будут перемещаться влево. Сила Лорентца $\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{vB}]$ будет отклонять такие частицы также вниз, так что теперь нижний край ленты зарядится отрицательно, а верхний — положительно. Таким образом, в этом случае поперечная разность потенциалов $V_1 - V_2$ будет отрицательной. Возникновение поперечной разности потенциалов в магнитном поле было экспериментально обнаружено Холлом в 1879 г., а само явление получило название *эффекта Холла*.

2. Рассчитаем приближенно разность потенциалов $V_1 - V_2$, пользуясь моделью свободных электронов. Между столкновениями движение частицы, переносящей ток, описывается уравнением

$$m\dot{\mathbf{v}} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right),$$

или в координатной форме

$$m\dot{v}_x = e \left(E_x + \frac{1}{c} v_y B \right),$$

$$m\dot{v}_y = e \left(E_y - \frac{1}{c} v_x B \right),$$

$$m\dot{v}_z = 0.$$

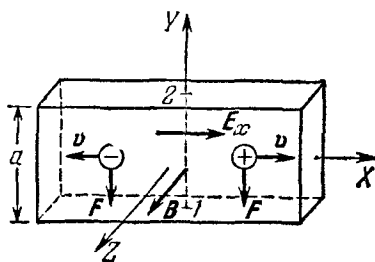


Рис. 235.

Допустим, что магнитное поле B слабое. Тогда поперечное электрическое поле E_y , а также члены, содержащие магнитное поле B , в последних уравнениях можно рассматривать как малые поправки к основной силе eE_x . Для получения решения удобно применить метод последовательных приближений. В нулевом приближении оставляем только главный член eE_x и получаем

$$v_x = v_{0x} + \frac{e}{m} E_x t,$$

где v_0 — скорость частицы непосредственно после последнего столкновения. Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем уравнение первого приближения

$$m\dot{v}_y = e \left(E_y - \frac{v_{0x}}{c} B - \frac{eB}{mc} E_x t \right),$$

откуда

$$v_y = \frac{e}{m} \left(E_y t - \frac{v_{0x}}{c} B t - \frac{eB}{2mc} E_x t^2 \right).$$

Если τ — время свободного пробега, то среднее значение v_y между двумя последовательными столкновениями будет

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v_y dt = \frac{e}{2m} \left(E_y \tau - \frac{v_{0x} B}{c} \tau - \frac{eB E_x}{3mc} \tau^2 \right).$$

Это выражение надо подвергнуть вторичному усреднению по всем столкновениям или (что то же самое) по всем частицам. Если ввести предположение, которым мы пользовались уже в § 42, что после каждого столкновения все направления скорости v_0 равновероятны, то при таком усреднении величина $v_{0x} \tau$ обратится в нуль, так что для скорости v_y , усредненной по всем частицам, получится

$$\bar{v}_y = \frac{e}{2m} \left(E_y \bar{\tau} - \frac{eB}{3mc} E_x \bar{\tau}^2 \right).$$

В установившемся состоянии $\bar{v}_y = 0$, а потому

$$E_y = \frac{eB}{3mc} \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\tau}} E_x.$$

Исключим отсюда $E_x \bar{\tau}^2 / \bar{\tau}$ с помощью формулы

$$j = \frac{ne^2}{2m} \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\tau}} E_x$$

(см. § 42). Тогда получим

$$E_y = R j B, \tag{98.2}$$

где

$$R = \frac{2}{3} \frac{1}{\text{пес}}. \quad (98.3)$$

Постоянная R называется *постоянной Холла*.

Учитывая, что предположения, введенные при наших вычислениях, не вполне корректны, нет смысла сохранять численный коэффициент $2/3$. Отбросив этот коэффициент, получаем оценочную формулу

$$R = \frac{1}{\text{пес}}. \quad (98.4)$$

Поперечная разность потенциалов $V_1 - V_2$, вызванная магнитным полем, определяется выражением

$$V_1 - V_2 = RjBa, \quad (98.6)$$

где a — ширина ленты. Зависимость такого типа и была экспериментально установлена Холлом.

Условие слабости магнитного поля, использованное в наших расчетах, сводится к требованию, чтобы поперечное электрическое поле E_y было слабым по сравнению с продольным полем E_x , т. е. $RjB \ll E_x$. Используя выражения для R и j , это условие нетрудно преобразовать к виду

$$\Omega \bar{\tau} \ll 1, \quad (98.7)$$

где $\Omega = |eB/(mc)|$ — циклотронная частота. Таким образом, время $\bar{\tau}$ должно быть мало по сравнению с циклотронным периодом $T = 2\pi/\Omega$.

3. Для измерения коэффициента Холла чаще всего применяется *компенсационный метод*. К пластинке из исследуемого материала, по которой течет электрический ток, в точках 1 и 2 подводятся два контакта (рис. 236). В цепь включаются последовательно гальванометр и компенсатор K , создающий напряжение, противоположное холловскому. Меняя это напряжение, добиваются того, чтобы ток через гальванометр обратился в нуль. После этого холловская разность потенциалов между точками 1 и 2 отсчитывается по компенсатору.

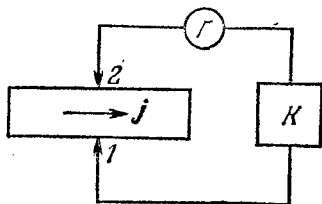


Рис. 236.

¹⁾ Более корректные вычисления, основанные на кинетическом уравнении Больцмана и классической статистике, приводят к результату

$$R = \frac{3\pi}{8\text{пес}}, \quad (98.5)$$

почти не отличающемуся от (98.3) и (98.4). Если же применять к электронам в металле статистику Ферми — Дирака, то результаты таких вычислений совпадают с формулой (98.4).

В большинстве таблиц приводятся значения не величины R , а величины c^2R . (Такое значение коэффициент Холла получил бы, если бы пользоваться электромагнитной системой единиц.)

Таблица 5

Значения c^2R в гауссовой системе для некоторых металлов

Металл	$c^2R \cdot 10^3$	A	ρ	z по (98.8)	Металл	$c^2R \cdot 10^3$	A	ρ	z по (98.8)
Li	-1,70	7	0,53	0,83	Au	-0,736	197	19,3	1,43
Na	-2,50	23	0,97	0,98	Al	-0,343	27	2,7	3,0
Cu	-0,609	63,6	8,9	1,2	Pt	-0,230	195	21,5	4,1
Ag	-0,944	108	10,5	1,13					

Используя табл. 5, нетрудно показать, что холловская разность потенциалов $V_1 - V_2$ весьма мала. Возьмем, например, золотую ленту толщиной $h = 0,1$ мм, по которой течет ток $\mathcal{I} = 10$ А. Если $B = 10^4$ Гс, то формула (98.6) дает

$$V_1 - V_2 = R \frac{\mathcal{I}}{ah} B a = \frac{R \mathcal{I} B}{h} = \frac{c^2 R B \mathcal{I} / c}{hc}.$$

Для перехода к практическим единицам умножаем эту величину на 300 и получаем

$$V_1 - V_2 = \frac{c^2 R B \mathcal{I} / c}{10^3 h} = - \frac{0,736 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 \cdot 1}{10^3 \cdot 10^{-2}} \approx 7 \text{ мкВ.}$$

Зная R , можно далее рассчитать концентрацию n электронов проводимости, а также число таких электронов z , приходящееся на один атом металла. Число атомов в единице объема определяется выражением $n_{\text{ат}} = N \rho / A$, где N — число Авогадро, ρ — плотность металла, а A — атомный вес. Число z найдется делением концентрации электронов n на $n_{\text{ат}}$. С учетом формулы (98.5) это дает

$$z = \frac{A}{R c \rho F} = \frac{A}{R c^2 \rho F / c}, \quad (98.8)$$

где F — число Фарадея в гауссовой системе единиц. Если его разделить на c , то получится то же число в электромагнитной системе: $F/c = 9650$. По формуле (98.8) и получены числа, приведенные в последнем столбце таблицы. Зная n и электропроводность металла, можно вычислить по формуле (98.1) подвижность b . Для «нормальных металлов» значения b лежат в пределах $\sim 5 \div 50 \text{ см}^2/(\text{с} \cdot \text{В})$. Столь низкие значения указывают на то, что электроны в металлах испытывают много соударений с кристаллической решеткой.

Для элементов первой группы периодической системы z приблизительно равно 1, т. е. числу валентных электронов. То же справед-

ливо для алюминия — элемента третьей группы ($z \approx 3$). Помимо «нормальных металлов», для которых коэффициент Холла отрицателен, причем $c^2 R \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$, существуют металлы, обладающие *аномальными свойствами*. Так, коэффициент Холла висмута и всех металлов пятой группы периодической системы аномально велик (у висмута он примерно в 10^4 раз больше, чем у нормальных металлов) и резко меняется с температурой. У ферромагнетиков коэффициенты Холла в 10—100 раз больше, чем у нормальных металлов, и зависят от напряженности магнитного поля. Наиболее замечательно, однако, что коэффициент Холла может быть как положительным, так и отрицательным. Так, он отрицателен для щелочных металлов, Cu, Ag, Au, Mg, Ca, Hg, Al, Ga, In, Ti, Mn, Ni, Sn, Pd, Bi, Pt и положителен для Be, Zn, Cd, Tl, V, Cr, Fe, Co, Pb, Mo, Ru, As, Sb, Ta, W, Re, Ir. Дело обстоит так, как если бы носителями тока во второй из этих групп металлов были не отрицательные ($e < 0$), а положительные ($e > 0$) частицы. Такое заключение, однако, противоречит всей совокупности наших сведений о природе металлов. Это противоречие долгое время являлось одной из основных трудностей в электронной теории металлов. Оно было вполне удовлетворительно разрешено квантовой теорией металлов (см. § 100).

§ 99. Применения статистики Ферми — Дирака к электронам в металлах

1. В § 42 мы говорили, что теория Друде, в которой электроны в металлах трактуются как частицы идеального газа, натолкнулась на трудности в вопросе о теплоемкости электронного газа. Эти трудности были успешно преодолены Зоммерфельдом (1868—1951) в 1928 г. Зоммерфельд сохранил модель свободных электронов, но применил к ней вместо классической статистики квантовую статистику Ферми — Дирака (см. т. II, § 82).

В отличие от классической квантовая статистика принимает во внимание, что частица или система частиц, совершающая финитное движение в заданном силовом поле, может находиться лишь во вполне определенных *квантовых состояниях*, которым соответствуют определенные значения энергии. Эти значения называются *энергетическими уровнями* системы. При финитных движениях энергетические уровни *дискретны*, т. е. отделены один от другого конечными интервалами. В модели идеального электронного газа финитность и квантование движения обусловлены большими отталкивательными силами, действующими на электроны вблизи поверхности тела. Эти силы играют роль *непроницаемых стенок*, не позволяющих электронному газу выходить за пределы занимаемого им объема. При отсутствии таких «стенок» движение электронов было бы инфинитным и неквантованным.