ГЛАВА X

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

* *

§ 122. Уравнение колебательного контура

1. Колебаниями в физике называют не только периодические или почти периодические движения тел, когда колеблющееся тело многократно повторяет одно и то же движение туда и обратно около определенного положения равновесия, а придают этому понятию более широкий смысл. *Под колебанием понимают всякий периодический или приблизительно периодический процесс, в котором значения той или иной физической величины повторяются точно или приближенно через равные или приблизительно равные промежутки времени.*

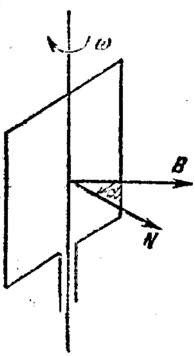

Рис. 290.

Допустим, например, что прямоугольная рамка (рис. 290) равномерно вращается в постоянном однородном магнитном поле с постоянной угловой скоростью ω. Если S — площадь рамки, то пронизывающий ее магнитный поток будет $\Phi = BS\cos\alpha$, где α — угол между направлением вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ и нормалью к плоскости рамки $\boldsymbol{N}$. При равномерном вращении $\alpha = \omega t$, $\Phi = \Phi_0\cos\omega t$, где $\Phi_0 = BS$. В рамке возбуждается электродвижущая сила $\mathscr{E}_{\text{инд}} = -d\Phi/dt = \mathscr{E}_0\sin\omega t$ и электрический ток $\mathscr{I} = \mathscr{I}_0\sin\omega t$, где $\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{I}_0$ — постоянные. Все эти выражения описывают колебательный процесс, в котором колеблющимися величинами являются магнитный поток Φ, электродвижущая сила $\mathscr{E}$ и электрический ток $\mathscr{I}$.

Специфические закономерности колебательных явлений, определяющие не мгновенные значения колеблющихся величин, а характеризующие *колебательный процесс в целом*, не зависят от того, какова физическая природа величин, совершающих колебания. Такие закономерности изучает *теория колебаний*, характеризующаяся *единым подходом* к колебаниям различной физической природы. В дальнейшем эта особенность колебательных закономерностей будет проиллюстрирована на конкретных примерах.

В настоящей главе будут изучаться преимущественно электрические колебания. Однако для лучшего понимания этих явлений мы будем сопоставлять их с аналогичными колебаниями механических систем.

2. Изучение электрических колебаний мы начнем с вывода *уравнения колебательного контура*. Так называется система, состоящая из последовательно соединенных конденсатора, катушки самоиндукции L и проводника с омическим сопротивлением R (рис. 291). Внешняя электродвижущая сила создает между полюсами *1* и *2* определенное напряжение $\mathscr{E}$, вообще говоря, меняющееся с течением времени. Одно из направлений при обходе контура тока примем за положительное. Оно обозначено на рис. 291 стрелками. Ток считается положительным, если он течет по контуру в положительном направлении, и отрицательным в противоположном случае. Обозначим через q заряд той из обкладок конденсатора, направление от которой к другой обкладке совпадает с положительным направлением контура *13421*. Применим к этому контуру уравнение Максвелла

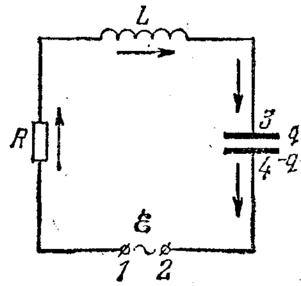

Рис. 291.

$$\oint E_l\,dl = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (122.1)$$

Мы пользуемся *практическими единицами*, которые при рассмотрении электрических колебаний более удобны. Пусть выполнено условие квазистационарности. Тогда, применяя к участку *13* закон Ома, найдем

$$\int\limits_{13} E_l\,dl = \int \frac{j}{\lambda}\,dl = \mathscr{I}\int \frac{dl}{S\lambda} = R\mathscr{I},$$

где R — омическое сопротивление этого участка. Если сопротивление участка *42* пренебрежимо мало, то интеграл по пути *32* равен напряжению V между обкладками конденсатора. Для квазистационарных процессов

$$\int\limits_{32} E_l\,dl = V = \frac{q}{C}.$$

Наконец, интеграл $\int\limits_{21} E_l\,dl = -\int\limits_{12} E_l\,dl$ есть подводимое напряжение между полюсами *1* и *2*, взятое с противоположным знаком:

$$\int\limits_{21} E_l\,dl = -\mathscr{E}.$$

В результате уравнение (122.1) примет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} + R\mathscr{I} + \frac{q}{C} = \mathscr{E}. \qquad (122.2)$$

Для квазистационарных токов $\Phi = LI$. Кроме того,

$$\mathcal{I} = \frac{dq}{dt}, \tag{122.3}$$

так что

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{dq}{dt}\right) + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathscr{E}. \tag{122.4}$$

Это и есть уравнение колебательного контура. Если катушка самоиндукции не деформируется ($L = \text{const}$), оно переходит в

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathscr{E}. \tag{122.5}$$

Механическим аналогом (122.5) может служить уравнение движения груза на пружине (рис. 292). Если справедлив закон Гука, а при движении груза возникает тормозящая сила $-\alpha\dot{x}$, пропорциональная скорости $\dot{x}$, то уравнение движения имеет вид

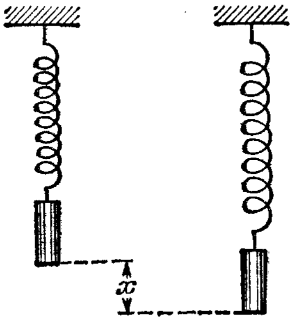

Рис. 292.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha\dot{x} + F,$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\dot{x} + kx = F, \tag{122.6}$$

где x — отклонение груза из положения равновесия, считаемое положительным, если оно направлено вниз. Величина $-kx$ есть *восстанавливающая сила*, равная сумме веса тела и силы натяжения пружины, F — результирующая всех прочих сил, действующих на груз. Это уравнение отличается от (122.5) только обозначениями и физическим смыслом входящих в него величин. Математически оба уравнения тождественны. В уравнении (122.5) роль отклонения x играет заряд конденсатора q; массы m — самоиндукция L; коэффициента сопротивления α — электрическое сопротивление R; коэффициента упругости пружины k — величина, обратная емкости, $1/C$; внешней силы F — внешняя электродвижущая сила $\mathscr{E}$. Одинаковые уравнения должны иметь и одинаковые решения. Заметив это, допустим, что в уравнении (122.6) $F = 0$, а коэффициент сопротивления α мал. Тогда, как хорошо известно из повседневного опыта, при отклонении груза из положения равновесия или сообщении ему толчка в вертикальном направлении возникнут колебания, слабо затухающие во времени. При $\alpha = 0$ затухания совсем не будет. Из математической тождественности уравнений (122.5) и (122.6) следует, что возникнут *электрические колебания*, если заряженный конденсатор замкнуть через катушку самоиндукции.

При этом заряд конденсатора q будет меняться во времени по тому же закону, что и отклонение груза из положения равновесия. Если нет омического сопротивления, то электрические колебания в колебательном контуре будут *незатухающими*. При наличии сопротивления R колебания затухают.

3. И без обращения к уравнениям и механической аналогии нетрудно понять, почему в колебательном контуре возникают и поддерживаются электрические колебания. Для простоты будем считать, что электрическое сопротивление колебательного контура равно нулю. Пусть в начальный момент верхняя пластинка конденсатора заряжена положительным электричеством, нижняя — отрицательным, а ток в колебательном контуре равен нулю (рис. 293, *а*).

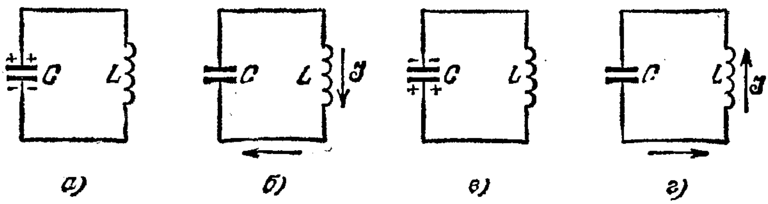

Рис. 293.

В этот момент вся энергия колебательного контура сосредоточена в конденсаторе. При отсутствии внешних электродвижущих сил конденсатор начнет разряжаться, через катушку самоиндукции потечет электрический ток. Электрическая энергия конденсатора начнет превращаться в магнитную энергию катушки самоиндукции. Этот процесс закончится, когда заряд конденсатора обратится в нуль, а ток в контуре достигнет максимума (рис. 293, *б*). Начиная с этого момента ток, не меняя направления, начнет убывать. Однако он не сразу упадет до нуля, так как этому препятствует электродвижущая сила индукции. Ток будет заряжать нижнюю пластинку конденсатора положительно, а верхнюю — отрицательно. Возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток. В конце концов ток обратится в нуль, а заряд на конденсаторе достигнет максимума (рис. 293, *в*). Тогда заряды на пластинках конденсатора по абсолютной величине станут такими же, что и в исходном положении *а*, только знаки их будут противоположными. С этого момента конденсатор начнет разряжаться вновь — по проводам потечет ток в направлении, противоположном направлению тока в положении *б*. В момент максимума тока (рис. 293, *г*) конденсатор разрядится, а затем колебательный контур вернется в исходное состояние *а*. После этого описанный цикл разрядки и зарядки конденсатора повторится снова. И если бы не было потерь энергии, то такое повторение происходило бы неограниченно долго — в контуре совершались бы строго периодические незатухающие электрические колебания.

4. Уравнения (122.5) и (122.6) — *дифференциальные уравнения второго порядка*. Если «внешних сил» $\mathcal{E}$ или F нет, то уравнения *линейны и однородны* относительно неизвестных q или x и их производных по времени. Они описывают так называемые *свободные колебания*. Колебательные системы, свободные колебания которых описываются линейными уравнениями, называются *линейными колебательными системами*. Введем обозначения:

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC} \quad \text{или} \quad \omega_0^2=\frac{k}{m}, \tag{122.7}$$

$$2\gamma=\frac{R}{L} \quad \text{или} \quad 2\gamma=\frac{\alpha}{m}, \tag{122.8}$$

$$X=\frac{\mathcal{E}}{C} \quad \text{или} \quad X=\frac{F}{m}. \tag{122.9}$$

Тогда

$$\ddot{q}+2\gamma\dot{q}+\omega_0^2 q=X, \tag{122.10}$$

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=X. \tag{122.11}$$

Величина ω_0 называется *собственной частотой* колебательной системы, а γ — *коэффициентом затухания*. Смысл этих названий выяснится в дальнейшем.

5. Уравнение (122.5) можно переписать в виде

$$V_L+V_R+V_C=V_{\text{вх}},$$

где V_L, V_R, V_C — напряжения на катушке самоиндукции, омическом сопротивлении и конденсаторе, а $V_{\text{вх}}$ — входное напряжение, подводимое к колебательному контуру. Как видно из (122.5), эти величины связаны соотношениями

$$V_R=R\frac{dq}{dt}=CR\frac{dV_C}{dt}, \qquad V_L=L\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{L}{R}\frac{dV_R}{dt}.$$

На этих соотношениях основано применение электрических схем для *автоматического дифференцирования* и *интегрирования*. Соответствующие устройства называются *дифференцирующими* и *интегрирующими ячейками*. Допустим, например, что конденсатора в цепи нет. Тогда (122.5) запишется в виде

$$V_L+V_R=V_{\text{вх}},$$

причем $V_L=\frac{L}{R}\frac{dV_R}{dt}$, т. е. напряжение на самоиндукции с точностью до числового множителя равно производной от напряжения на сопротивлении R. Если параметры L и R подобрать так, чтобы было выполнено условие $|V_L|\ll|V_{\text{вх}}|$, то $V_R\approx V_{\text{вх}}$ и, следовательно, $V_L=\frac{L}{R}\frac{dV_{\text{вх}}}{dt}$. Подадим на осциллограф напряжение с катушки самоиндукции. Тогда получится осциллограмма, представляющая производную входного напряжения. Аналогичная RL-ячейка может быть использована и для интегрирования. Действительно, $V_R=\frac{R}{L}\int V_L\,dt$. Подберем параметры R и L так, чтобы было $|V_R| \ll |V_L|$. Тогда приближенно $V_L = V_{вх}$ и, следовательно, $V_R = \frac{R}{L}\int V_{вх}\,dt$. Подавая на осциллограф напряжение с сопротивления R, мы получим осциллограмму, представляющую интеграл от входного напряжения. Аналогично действуют дифференцирующие и интегрирующие RC-ячейки.

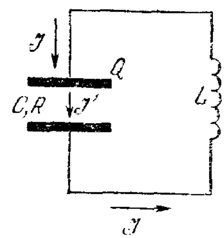

Рис. 294.

ЗАДАЧА

Колебательный контур содержит конденсатор с утечкой. Это значит, что небольшая часть тока, поступающего на одну из обкладок конденсатора, проходит через диэлектрик на другую обкладку. Емкость конденсатора равна C, его сопротивление R. Пренебрегая сопротивлением катушки самоиндукции и прочих проводов и предполагая, что выполнено условие квазистационарности, вывести уравнение собственных колебаний колебательного контура. Найти собственную частоту ω_0 и коэффициент затухания γ.

Решение. При выполнении условия квазистационарности (рис. 294)

$$L\frac{d\mathscr{I}}{dt} + V = 0, \qquad Q = CV,$$

$$\dot{Q} = \mathscr{I} - \mathscr{I}', \qquad V = R\mathscr{I}'.$$

Исключая Q, $\mathscr{I}$ и $\mathscr{I}'$, отсюда находим

$$\ddot{V} + 2\gamma\dot{V} + \omega_0^2 V = 0,$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad \gamma = \frac{1}{2RC}.$$

§ 123. Свободные колебания гармонического осциллятора

1. Если нет омического сопротивления, то свободные колебания в колебательном контуре описываются уравнением

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{123.1}$$

Уравнением такого же типа описываются свободные незатухающие колебания груза на пружине. Всякая система — механическая, электрическая или какая-либо другая, свободные колебания которой подчиняются уравнению типа (123.1), называется *гармоническим осциллятором*. При наличии силы сопротивления $2\gamma\dot{q}$ система называется *гармоническим осциллятором с затуханием*.

Для решения уравнения (123.1) умножим обе части его на $\dot{q}$. Тогда после небольших преобразований получим

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2) = 0.$$