параметры R и L так, чтобы было $|V_R| \ll |V_L|$. Тогда приближенно $V_L = V_{\text{вх}}$ и, следовательно, $V_R = \frac{R}{L}\int V_{\text{вх}}\,dt$. Подавая на осциллограф напряжение с сопротивления R, мы получим осциллограмму, представляющую интеграл от входного напряжения. Аналогично действуют дифференцирующие и интегрирующие RC-ячейки.

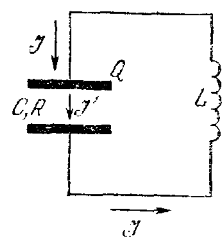

Рис. 294.

ЗАДАЧА

Колебательный контур содержит конденсатор с утечкой. Это значит, что небольшая часть тока, поступающего на одну из обкладок конденсатора, проходит через диэлектрик на другую обкладку. Емкость конденсатора равна C, его сопротивление R. Пренебрегая сопротивлением катушки самоиндукции и прочих проводов и предполагая, что выполнено условие квазистационарности, вывести уравнение собственных колебаний колебательного контура. Найти собственную частоту ω_0 и коэффициент затухания γ.

Решение. При выполнении условия квазистационарности (рис. 294)

$$L\frac{d\mathcal{I}}{dt} + V = 0, \qquad Q = CV,$$

$$\dot{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{I}', \qquad V = R\mathcal{I}'.$$

Исключая Q, $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}'$, отсюда находим

$$\ddot{V} + 2\gamma\dot{V} + \omega_0^2 V = 0,$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad \gamma = \frac{1}{2RC}.$$

§ 123. Свободные колебания гармонического осциллятора

1. Если нет омического сопротивления, то свободные колебания в колебательном контуре описываются уравнением

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{123.1}$$

Уравнением такого же типа описываются свободные незатухающие колебания груза на пружине. Всякая система — механическая, электрическая или какая-либо другая, свободные колебания которой подчиняются уравнению типа (123.1), называется *гармоническим осциллятором*. При наличии силы сопротивления $2\gamma\dot{q}$ система называется *гармоническим осциллятором с затуханием*.

Для решения уравнения (123.1) умножим обе части его на $\dot{q}$. Тогда после небольших преобразований получим

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2) = 0.$$

Отсюда следует, что величина $\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2$ не меняется во времени. Так как эта величина есть сумма двух квадратов, то она существенно положительна и может быть представлена в виде

$$\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2 = \omega_0^2 q_0^2,$$

где q_0 — постоянная. Это равенство выражает сохранение энергии, так как его можно записать в виде

$$\frac{1}{2} L\mathscr{I}^2 + \frac{q^2}{2C} = \text{const}.$$

Чтобы выполнить второе интегрирование, разделим переменные:

$$\frac{dq}{\sqrt{q_0^2 - q^2}} = \pm\, \omega_0\, dt.$$

Отсюда

$$\arccos \frac{q}{q_0} = \pm\, \omega_0 t + \text{const},$$

или

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \delta). \tag{123.2}$$

Постоянные интегрирования q_0 и δ определяются начальными условиями. В качестве таковых можно, например, взять значения заряда q и тока $\mathscr{I} = \dot{q}$ в момент времени $t = 0$.

2. Формулой вида (123.2) описываются также свободные колебания груза, подвешенного на пружине, физического или математического маятника при малых отклонениях, ножки звучащего камертона, а также колебания напряжения в цепи городского тока. Если какая-либо величина меняется во времени по закону (123.2), то говорят, что она совершает *гармоническое колебание*. С гармоническими колебаниями механических систем мы подробно ознакомились уже в первом томе, где нас больше всего интересовали периоды свободных колебаний таких систем. Величина ω_0 называется *круговой* или *циклической частотой* гармонического колебания. Она совпадает с собственной круговой частотой колебательной системы, определяемой формулой (122.7). Промежуток времени

$$T_0 = 2\pi/\omega_0, \tag{123.3}$$

через который значения колеблющейся величины периодически повторяются, называется *периодом колебания*. Число колебаний в единицу времени

$$\nu_0 = 1/T_0 = \omega_0/2\pi \tag{123.4}$$

называется *частотой колебаний*. За единицу частоты принимают *герц*. Герц есть такая частота, когда в одну секунду совершается одно колебание. В дальнейшем прилагательное «круговая» будет часто опускаться. О какой частоте идет речь, будет видно из обозначений. Круговая частота всегда обозначается ω или Ω, просто частота — ν. Величина q_0 называется *амплитудой*, а величина $\omega_0 t + \delta$ — *фазой колебания.* Величину δ называют *начальной фазой.* Собственные частоты ω_0 и ν_0, а также период собственных колебаний T_0 зависят только от *устройства* колебательной системы. Напротив, амплитуда q_0 и начальная фаза δ определяются не самой колебательной системой, а *начальными условиями.*

Для электрических колебаний собственная частота определяется формулой (122.7). Поэтому

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{123.5}$$

Эта формула называется *формулой Вильяма Томсона.*

Если по оси абсцисс откладывать время t, а по оси ординат — значение колеблющейся величины q, то получится *синусоида* (рис.

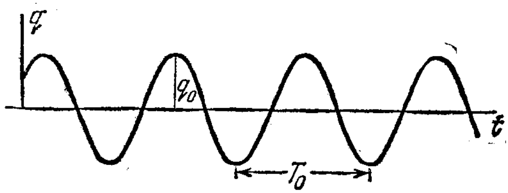

Рис. 295.

295). Это — периодическая кривая, значения ее ординат периодически повторяются через период T_0. Амплитуда q_0 есть максимальное отклонение величины q от ее нулевого значения.

Ток при электрических колебаниях найдется дифференцированием выражения (123.2):

$$\mathcal{I} = \dot{q} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \delta),$$

или

$$\mathcal{I} = \omega_0 q_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда видно, что колебания тока $\mathcal{I}$ опережают по фазе колебания заряда q на $\pi/2$. Электрическая и магнитная энергии определяются выражениями

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \delta),$$

$$W_m = \frac{1}{2}L\mathcal{I}^2 = \frac{1}{2}L\omega_0^2 q^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta) = \frac{q_0^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t + \delta).$$

Представим их в виде

$$W_e = \frac{q_0^2}{4C} + \frac{q_0^2}{4C}\cos(2\omega_0 t + \delta),$$

$$W_m = \frac{q_0^2}{4C} - \frac{q_0^2}{4C}\cos(2\omega_0 t + \delta).$$

Средние значения этих величин одинаковы и равны

$$\overline{W}_e = \overline{W}_m = \frac{q_0^2}{4C} = \frac{1}{4} L\mathscr{I}_0^2.$$

Около этих средних значений величины W_e и W_m совершают гармонические колебания с круговой частотой $2\omega_0$. Непрерывно происходит переход электрической энергии в магнитную и обратно. Когда электрическая энергия достигает максимума, магнитная обращается в нуль, и наоборот. Полная энергия

$$W = W_e + W_m = \frac{q_0^2}{2C} \qquad (123.6)$$

остается постоянной, как и должно быть по закону сохранения энергии. Она, как видно из формулы (123.6), пропорциональна *квадрату амплитуды*. Это справедливо и для механических гармонических колебаний.

3. В заключение точно сформулируем *условие квазистационарности*, выполнение которого предполагалось при рассмотрении всех колебаний в колебательном контуре. Квазистационарность означает, что мгновенные значения тока $\mathscr{I}$ практически одинаковы на всех участках проводов, соединяющих обкладки конденсатора. Для этого все изменения во времени должны происходить настолько медленно, чтобы распространение электродинамических взаимодействий можно было считать *мгновенным*. Такие взаимодействия распространяются со скоростью, которая по порядку величины совпадает со скоростью света в вакууме c. Обозначим через l длину провода, соединяющего обкладки конденсатора (практически эта величина совпадает с длиной провода, из которого изготовлена обмотка катушки самоиндукции). На прохождение длины l электромагнитное возмущение затрачивает время порядка $\tau = l/c$. Условие квазистационарности будет выполнено, если $\tau \ll T_0$ или

$$l \ll \lambda, \qquad (123.7)$$

где λ — длина электромагнитной волны в вакууме:

$$\lambda = cT_0. \qquad (123.8)$$

ЗАДАЧА

Полностью ионизованная плазма, состоящая из электронов и положительных ионов, ограничена двумя параллельными плоскостями (рис. 288). Если все электроны сместить вдоль оси X (выбранной перпендикулярно к этим плоскостям), то возникнет сила, возвращающая их в положение равновесия. В плазме начнутся колебания. Они называются *плазменными колебаниями*. Определить их характер и собственную частоту. «Тяжелые» ионы можно считать неподвижными.

Решение. Если смещение электрона из положения равновесия равно x, то электрическое поле, возникающее в плазме, будет $E = 4\pi nex$, а сила, действующая на электрон, $F = -4\pi ne^2x$. Под действием этой силы электроны будут совершать гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{4\pi \frac{ne^2}{m}}, \qquad (123.9)$$

называемой *плазменной частотой*.

§ 124. Затухающие колебания

Учтем теперь тормозящие силы. Полагая в уравнении (122.10) $X = 0$, получим уравнение свободных колебаний

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \qquad (124.1)$$

Для его решения введем новую переменную ξ, полагая

$$q = \xi e^{-\gamma t}. \qquad (124.2)$$

Тогда

$$\ddot{\xi} + (\omega_0^2 - \gamma^2)\,\xi = 0. \qquad (124.3)$$

Формально это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний (123.1). Однако коэффициент $\omega_0^2 - \gamma^2$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Надо различать три случая.

Случай 1. $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$. Введем обозначение

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2. \qquad (124.4)$$

Тогда

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0.$$

Отсюда следует, что величина ξ должна совершать незатухающие гармонические колебания с круговой частотой ω:

$$\xi = a\cos(\omega t + \delta).$$

Следовательно,

$$q = ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta). \qquad (124.5)$$

Кривая $q = q(t)$, представляемая этой формулой (рис. 296), *не периодична*. Однако величина q периодически проходит через нуль и бесконечное число раз достигает максимума и минимума. В этом смысле процессы, описываемые формулой (124.5), являются колебательными. Они называются *затухающими колебаниями*. Промежуток времени между двумя последовательными прохождениями величины q через нуль равен π/ω. Удвоенное его значение

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}}. \qquad (124.6)$$