вующая на электрон, $F = -4\pi ne^2x$. Под действием этой силы электроны будут совершать гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{4\pi \frac{ne^2}{m}}, \qquad (123.9)$$

называемой *плазменной частотой*.

§ 124. Затухающие колебания

Учтем теперь тормозящие силы. Полагая в уравнении (122.10) $X = 0$, получим уравнение свободных колебаний

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \qquad (124.1)$$

Для его решения введем новую переменную ξ, полагая

$$q = \xi e^{-\gamma t}. \qquad (124.2)$$

Тогда

$$\ddot{\xi} + (\omega_0^2 - \gamma^2)\,\xi = 0. \qquad (124.3)$$

Формально это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний (123.1). Однако коэффициент $\omega_0^2 - \gamma^2$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Надо различать три случая.

Случай 1. $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$. Введем обозначение

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2. \qquad (124.4)$$

Тогда

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0.$$

Отсюда следует, что величина ξ должна совершать незатухающие гармонические колебания с круговой частотой ω:

$$\xi = a\cos(\omega t + \delta).$$

Следовательно,

$$q = ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta). \qquad (124.5)$$

Кривая $q = q(t)$, представляемая этой формулой (рис. 296), *не периодична*. Однако величина q периодически проходит через нуль и бесконечное число раз достигает максимума и минимума. В этом смысле процессы, описываемые формулой (124.5), являются колебательными. Они называются *затухающими колебаниями*. Промежуток времени между двумя последовательными прохождениями величины q через нуль равен π/ω. Удвоенное его значение

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}}. \qquad (124.6)$$

называется *периодом колебаний,* хотя слово «период» здесь не совсем уместно, так как процесс не периодический. Из формулы (124.6) видно, что $T > T_0$, т. е. тормозящие силы понижают частоту колебаний и удлиняют их период. Приравнивая нулю производную $\dot{q}$, легко убедиться, что период T есть также время между двумя последовательными прохождениями величины q через максимум или минимум. Множитель

$$A = ae^{-\gamma t}, \qquad (124.7)$$

стоящий перед периодической функцией $\cos(\omega t + \delta)$ в формуле (124.5), называется *амплитудой затухающих колебаний.* Она экспоненциально убывает во времени. Время

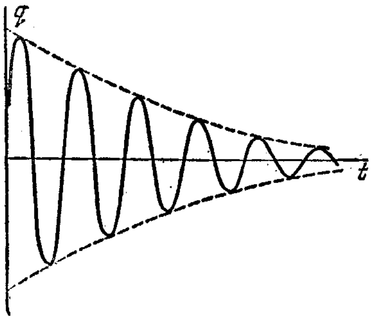

Рис. 296.

$$\tau = \frac{1}{\gamma}, \qquad (124.8)$$

по истечении которого амплитуда A убывает в e раз, называется *временем затухания.* Число полных колебаний, совершаемое за время τ, равно

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\gamma T}. \qquad (124.9)$$

Отношение амплитуд в моменты последовательных прохождений колеблющейся величины через максимумы или минимумы равно $A_1/A_2 = e^{\gamma T}$. Логарифм этого отношения

$$d = \ln\frac{A_1}{A_2} = \gamma T \qquad (124.10)$$

называется *логарифмическим декрементом колебания.* Он связан с числом колебаний N соотношением

$$N = \frac{1}{d}. \qquad (124.11)$$

Величина

$$Q = \pi N = \frac{\pi}{d} \qquad (124.12)$$

называется *добротностью* колебательного контура. Физический смысл этой величины будет установлен ниже (см. § 127).

Постоянные интегрирования a и δ определяются начальными условиями. Допустим, например, что в начальный момент $q = 0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$, где $\dot{q}_0$ — известная постоянная. Полагая в выражении (124.5) $t = 0$, получим $\cos\delta = 0$, и, следовательно, $\delta = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$,

$q = \pm ae^{-\gamma t} \sin \omega t$. Без потери общности двойной знак можно опустить и написать

$$q = ae^{-\gamma t} \sin \omega t,$$

так как постоянную интегрирования можно обозначить и через $+a$, и через $-a$. Отсюда

$$\dot{q} = (\omega \cos \omega t - \gamma \sin \omega t)\, ae^{-\gamma t}.$$

Подставляя сюда $t = 0$, получим $\dot{q}_0 = \omega a$,

$$q = \frac{\dot{q}_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t. \tag{124.13}$$

Случай 2. $\omega_0^2 - \gamma^2 = 0$. Это — предельный случай предыдущего, когда период T обращается в бесконечность. Уравнение (124.3) переходит в $\ddot{\xi} = 0$, и, следовательно,

$$q = (a + bt)\, e^{-\gamma t}. \tag{124.14}$$

В зависимости от значений постоянных интегрирования a и b величина q будет или не будет проходить через максимум (один

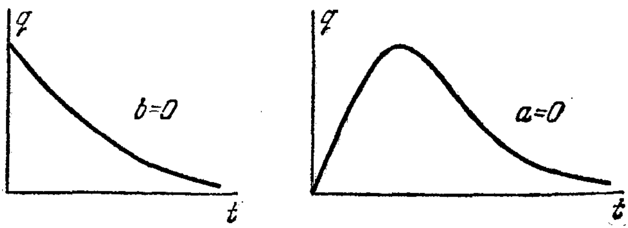

Рис. 297.

раз). На рис. 297 изображены два случая: 1) $a \neq 0$, $b = 0$ и 2) $a = 0$, $b \neq 0$. При любых a и b величина q асимптотически приближается к нулю, когда $t \to \infty$. Процесс не будет колебательным. Он называется *апериодическим*.

Если в начальный момент $q_0 = 0$, то $a = 0$,

$$q = bte^{-\gamma t}, \qquad \dot{q} = (1 - \gamma t)\, be^{-\gamma t}.$$

Полагая $t = 0$, находим $b = \dot{q}_0$. Следовательно,

$$q = \dot{q}_0 te^{-\gamma t}. \tag{124.15}$$

Случай 3. $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$. Общее решение уравнения (124.3) будет

$$\xi = C_1 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t} + C_2 e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t},$$

а уравнения (124.1)

$$q = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}. \tag{124.16}$$

Через α_1 и α_2 обозначены положительные постоянные:

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{124.17}$$

Если в начальный момент $q_0 = 0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$, то

$$q = \frac{\dot{q}_0}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}\right) = \frac{\dot{q}_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\left(e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}\right). \tag{124.18}$$

§ 125. Баллистический гальванометр

Баллистический гальванометр предназначен для измерения количества электричества, проходящего через цепь при кратковременных импульсах тока. Подвижной частью прибора является прямоугольная рамка с обмоткой из тонкой изолированной проволоки, подвешенная на нити между полюсами магнита, где она может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси. Возвращающий момент, стремящийся вернуть рамку в положение равновесия, создается закрученной нитью и пропорционален угловому отклонению φ. Момент инерции рамки Θ выбирают большим, чтобы период собственных колебаний ее был не меньше 10 секунд. При колебаниях в обмотке рамки возбуждается индукционный ток, тормозящий движение последней. Тормозящий момент должен быть пропорционален угловой скорости $\dot{\varphi}$. Для достижения этого полюсным наконечникам придают такую форму, чтобы они оканчивались цилиндрическими поверхностями, а между самими полюсами помещают цилиндр из мягкого железа (рис. 298, вид сверху, рамка не показана). При таком устройстве магнитные силовые линии в зазоре между полюсами магнита и цилиндром, где совершаются крутильные колебания рамки, практически радиальны. Вертикальные стороны рамки пересекают магнитные силовые линии, оставаясь все время перпендикулярными к ним. Вследствие этого возникающая электродвижущая сила и обусловленный ею тормозящий момент оказываются пропорциональными угловой скорости $\dot{\varphi}$. Тормозящий момент, обусловленный сопротивлением воздуха, также пропорционален $\dot{\varphi}$. Поэтому крутильные колебания рамки гальванометра будут описываться дифференциальным уравнением того же типа, что и затухающие колебания, рассмотренные в предыдущем параграфе.

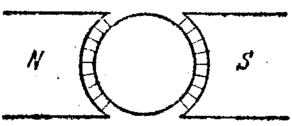

Рис. 298.

Допустим, что через гальванометр проходит кратковременный импульс тока $\mathcal{I}$, длительность которого τ много меньше периода собственных колебаний рамки T. Во время прохождения такого импульса можно пренебречь всеми силами, за исключением амперовых сил, действующих на рамку со стороны внешнего магнит-