ного поля. Эти силы создают вращающий момент, пропорциональный току $\mathscr{I}$, так что уравнение движения рамки может быть записано в виде $\Theta\ddot{\varphi} = k\mathscr{I}$, где k — постоянная. Интегрируя по времени прохождения импульса, найдем угловую скорость рамки, которую она приобретет за это время;

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{k}{\Theta}\int \mathscr{I}\,dt = \frac{k}{\Theta}q,$$

где q — количество прошедшего электричества. За то же время массивная рамка не успеет заметно сместиться. Импульс тока действует на рамку аналогично удару молотка по массивному шару. Пренебрегая временем τ, движение рамки гальванометра можно рассматривать как свободное затухающее колебание при начальных условиях $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = kq/\Theta$. Такая задача была решена в предыдущем параграфе. Было показано, что амплитуда, а с ней и максимальное отклонение $\varphi_{\text{макс}}$ (отброс гальванометра) пропорциональны $\dot{\varphi}_0$, независимо от того, будет ли режим колебательным или апериодическим. Таким образом, отброс гальванометра связан с количеством прошедшего электричества соотношением

$$q = B\varphi_{\text{макс}}, \qquad (125.1)$$

где B — постоянная, называемая *баллистической постоянной гальванометра*. Она измеряется экспериментально. Для этого достаточно разрядить через гальванометр конденсатор известной емкости, заряженный до определенного потенциала, и измерить отброс гальванометра. После такой градуировки формулой (125.1) можно пользоваться для количественных измерений.

§ 126. Векторная диаграмма и комплексные обозначения

1. Существует наглядный геометрический способ представления гармонических колебаний, о котором уже говорилось в первом томе. Допустим, что геометрическая точка M равномерно вращается по окружности радиуса r (рис. 299) с угловой скоростью ω_0. Положение точки на окружности можно задать центральным углом φ между радиусом OM и положительным направлением оси X. Он равен $\varphi = \omega_0 t + \delta$, где δ — значение угла φ в начальный момент $t = 0$. При вращении точки M ее проекция N на ось X двигается по диаметру AB туда и обратно, совершая колебания между точками A и B с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Абсцисса точки N

$$x = a\cos\varphi = a\cos(\omega_0 t + \delta), \qquad (126.1)$$

как и сама точка N, совершает незатухающее гармоническое колебание. Этим способом можно представлять гармонические колебания любых величин. Надо только условиться изображать колеблющуюся величину абсциссой точки M, равномерно вращающейся по окружности. Вместо абсциссы можно, конечно, брать ординату $y = a\sin(\omega_0 t + \delta) = a\cos\left[\omega_0 t + \left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)\right]$, но во избежание недоразумений условимся всюду пользоваться абсциссой.

Для представления затухающих колебаний вместо окружности надо взять логарифмическую спираль, асимптотически приближающуюся к фокусу O (рис. 300). Если точка M движется по спирали с постоянной угловой скоростью ω_0, приближаясь к фокусу, то ее проекция N на ось X будет совершать затухающее гармоническое колебание.

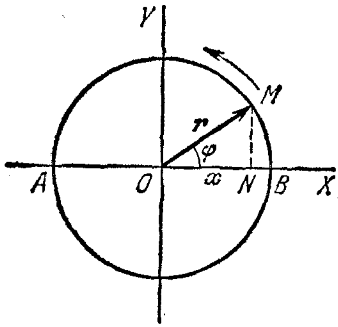

Рис. 299.

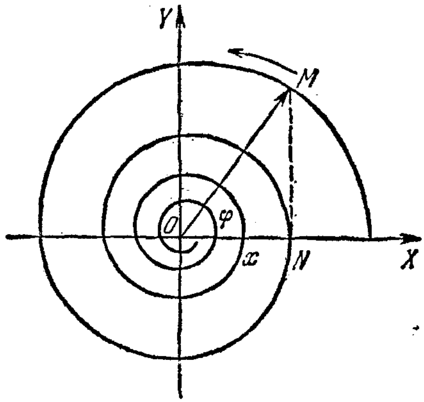

Рис. 300.

2. Вместо точки M можно взять радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$, равномерно вращающийся вокруг начала координат O. Гармонически колеблющаяся величина изобразится проекцией x этого радиуса-вектора на ось X. При этом во многих задачах оказывается удобным математические операции над величиной x заменить соответствующими операциями над самим радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$. Например, если нужно вычислить сумму слагаемых

$$x_1 = a_1 e^{-\gamma_1 t}\cos(\omega_1 t + \delta_1)$$

и

$$x_2 = a_2 e^{-\gamma_2 t}\cos(\omega_2 t + \delta_2),$$

то можно сначала сложить по правилу параллелограмма векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, проекциями которых являются эти слагаемые, а затем спроектировать полученный вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$ на ось абсцисс. Результат этих операций, очевидно, будет равен $x = x_1 + x_2$. Операция проектирования производится в самом конце вычисления. При известном навыке можно совсем отвлечься от проекций, а изображать колеблющуюся величину непосредственно самим вектором $\boldsymbol{r}$, равномерно вращающимся вокруг своего начала.

Его проектирование на ось X *подразумевается, но не выполняется фактически.* Такой метод называется *методом векторных диаграмм.* Рис. 299 можно поэтому назвать *векторной диаграммой незатухающего,* а рис. 300 — *затухающего гармонического колебания.* Метод векторных диаграмм широко применяется в электротехнике при изучении переменных токов.

3. В физике более широкое распространение получил другой метод, отличающийся от метода векторных диаграмм только по форме. В этом методе колеблющаяся величина представляется *комплексным числом.* Положение точки на плоскости (рис. 299) можно однозначно задать комплексным числом $z = x + iy$. Если точка M вращается, то

$$x = a\cos(\omega_0 t + \delta), \qquad y = a\sin(\omega_0 t + \delta).$$

Поэтому, используя известную формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

величину z можно представить в виде

$$z = ae^{i(\omega_0 t + \delta)}.$$

Вещественная часть этого выражения

$$\mathrm{Re}(z) = a\cos(\omega_0 t + \delta) = x$$

представляет гармонические колебания величины x. Условимся опускать знак взятия вещественной части Re и писать просто

$$x = ae^{i(\omega_0 t + \delta)}. \tag{126.2}$$

Это символическое равенство не следует понимать буквально. Его надо понимать в том смысле, что физическая величина x равна *вещественной части* комплексного выражения, стоящего в этом равенстве справа. Модуль этого комплексного выражения a равен амплитуде колебания, а его аргумент $\omega_0 t + \delta$ — фазе. Можно формально упростить запись (126.2). Введем комплексную величину $A = ae^{i\delta}$, называемую *комплексной амплитудой колебания.* Тогда

$$x = Ae^{i\omega_0 t}. \tag{126.3}$$

Комплексность амплитуды A означает, следовательно, что колебание происходит с *начальной фазой,* отличной от нуля.

Наконец, можно формально рассматривать выражения типа (126.3) при комплексных значениях величины ω_0. Для раскрытия физического смысла таких выражений полагаем $\omega_0 = \omega_1 + i\omega_2$. Тогда

$$x = Ae^{i(\omega_1 + i\omega_2)t} = ae^{-\omega_2 t}e^{i(\omega_1 t + \delta)} = ae^{-\omega_2 t}\cos(\omega_1 t + \delta).$$

Если $\omega_2 > 0$, то это выражение представляет *затухающее гармоническое колебание* с круговой частотой ω_1 и показателем затухания ω_2. Если $\omega_2 < 0$, то получится *колебание с неограниченно нарастающей амплитудой.* Таким образом, если частота комплексна, то это означает, что амплитуда колебания *экспоненциально затухает или нарастает во времени.*

Очень важно научиться понимать физический смысл уравнений, записанных в комплексной форме, не переходя к вещественной форме записи. Комплексная форма позволяет часто избежать громоздкости формул и делает сами формулы более общими и легче обозримыми. Особенно широко комплексная форма применяется при изучении распространения волн.

4. Над комплексными величинами можно производить многие математические операции, как если бы эти величины были вещественными. Так можно поступать не всегда. Это можно делать только тогда, когда операции *вещественны и линейны.* К ним относятся, например, сложение, вычитание, умножение и деление на вещественное число, дифференцирование и интегрирование по вещественной переменной и пр. Вообще, операция L называется *линейной,* если результат действия ее на величину $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ представляется в виде

$$L(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 L(z_1) + \alpha_2 L(z_2), \tag{126.4}$$

где z_1 и z_2 — какие угодно (вообще говоря, комплексные) величины, а α_1 и α_2 — любые постоянные. При этом в физике нас, в конце концов, интересуют лишь *вещественные операции,* т. е. такие, результаты действия которых на *вещественные величины* сами *вещественны.*

Комплексные выражения сами по себе не соответствуют никаким физическим величинам. Последние всегда вещественны и только из соображений удобства иногда представляются вещественными частями комплексных выражений. И математические операции в физике должны, в конце концов, определяться как операции над вещественными физическими величинами. Допустим, однако, что над вещественной величиной x надо выполнить линейную вещественную операцию L. Результат будет $L(x)$. Но тот же результат можно получить иначе. Возьмем комплексную величину $x + iy$ и применим к ней операцию L. Получим

$$L(x + iy) = L(x) + iL(y).$$

Отбросив мнимую часть, снова найдем $L(x)$. Если вычисление по второму методу окажется проще, то его применение оправдано.

Например, вместо того, чтобы дифференцировать по t функцию $x = a\cos(\omega_0 t + \delta)$, можно продифференцировать по тому же аргументу комплексное выражение (126.2) или (126.3), а затем взять вещественную часть результата. В обоих случаях получится одно и то же.

Но было бы грубой ошибкой переносить этот прием на *нелинейные операции*. Пусть, например, требуется возвести в квадрат вещественную величину x. Правильный результат будет x^2. Попробуем, однако, формально применить комплексный метод. Заменим x на $x + iy$ и возведем в квадрат, получим $(x^2 - y^2) + i2xy$. Вещественная часть этого выражения равна $x^2 - y^2$. Она зависит не только от вещественной части выражения $x + iy$, но и от мнимой. Ошибка получилась потому, что возведение в квадрат — нелинейная операция.

§ 127. Вынужденные колебания затухающего осциллятора под действием синусоидальной силы

1. Вынужденные колебания затухающего осциллятора описываются уравнением

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X(t), \tag{127.1}$$

где $X(t)$ — внешняя действующая сила, точнее, электродвижущая сила, деленная на индуктивность катушки самоиндукции, или (в случае механических колебаний) сила, деленная на массу колеблющегося тела. Уравнение (127.1) *линейно*, т. е. первой степени относительно неизвестного q и его производных по времени. Оно *неоднородно*, т. е. содержит правую часть $X(t)$. Для линейных однородных уравнений (т. е. уравнений без правой части) справедлив *принцип суперпозиции*, согласно которому сумма любых двух решений уравнения есть также решение того же уравнения. Для линейных неоднородных уравнений это несправедливо. Однако здесь имеет место суперпозиция решений *в другом смысле*. Пусть правая часть в уравнении (127.1) представляется в виде суммы $X = \sum X_i(t)$, а $q_i(t)$ — решение уравнения (127.1), в котором правая часть заменена на $X_i(t)$. Тогда сумма $q = \sum q_i(t)$ будет решением уравнения (127.1) с правой частью $X = \sum X_i(t)$. Для теории колебаний отмеченное свойство линейных уравнений имеет большое значение. Оно позволяет общую задачу о вынужденных колебаниях под действием *произвольно меняющейся силы* свести к частной задаче о вынужденных колебаниях под действием *синусоидальной силы*. Дело в том, что согласно известной математической *теореме Фурье* всякая функция $X(t)$ довольно общего вида может быть представлена в виде суммы синусоидальных функций (см. § 128).

Покажем теперь, как связаны между собой решения неоднородного и соответствующего ему однородного уравнений. Пусть $\bar{q}(t)$ — любое частное решение неоднородного уравнения (127.1).