взять вещественную часть результата. В обоих случаях получится одно и то же.

Но было бы грубой ошибкой переносить этот прием на *нелинейные операции*. Пусть, например, требуется возвести в квадрат вещественную величину x. Правильный результат будет x^2. Попробуем, однако, формально применить комплексный метод. Заменим x на $x + iy$ и возведем в квадрат, получим $(x^2 - y^2) + i2xy$. Вещественная часть этого выражения равна $x^2 - y^2$. Она зависит не только от вещественной части выражения $x + iy$, но и от мнимой. Ошибка получилась потому, что возведение в квадрат — нелинейная операция.

§ 127. Вынужденные колебания затухающего осциллятора под действием синусоидальной силы

1. Вынужденные колебания затухающего осциллятора описываются уравнением

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X(t), \tag{127.1}$$

где $X(t)$ — внешняя действующая сила, точнее, электродвижущая сила, деленная на индуктивность катушки самоиндукции, или (в случае механических колебаний) сила, деленная на массу колеблющегося тела. Уравнение (127.1) *линейно*, т. е. первой степени относительно неизвестного q и его производных по времени. Оно *неоднородно*, т. е. содержит правую часть $X(t)$. Для линейных однородных уравнений (т. е. уравнений без правой части) справедлив *принцип суперпозиции*, согласно которому сумма любых двух решений уравнения есть также решение того же уравнения. Для линейных неоднородных уравнений это несправедливо. Однако здесь имеет место суперпозиция решений *в другом смысле*. Пусть правая часть в уравнении (127.1) представляется в виде суммы $X = \sum X_i(t)$, а $q_i(t)$ — решение уравнения (127.1), в котором правая часть заменена на $X_i(t)$. Тогда сумма $q = \sum q_i(t)$ будет решением уравнения (127.1) с правой частью $X = \sum X_i(t)$. Для теории колебаний отмеченное свойство линейных уравнений имеет большое значение. Оно позволяет общую задачу о вынужденных колебаниях под действием *произвольно меняющейся силы* свести к частной задаче о вынужденных колебаниях под действием *синусоидальной силы*. Дело в том, что согласно известной математической *теореме Фурье* всякая функция $X(t)$ довольно общего вида может быть представлена в виде суммы синусоидальных функций (см. § 128).

Покажем теперь, как связаны между собой решения неоднородного и соответствующего ему однородного уравнений. Пусть $\bar{q}(t)$ — любое частное решение неоднородного уравнения (127.1).

Тогда $\ddot{\bar{q}} + 2\gamma\dot{\bar{q}} + \omega_0^2\bar{q} = X(t)$. Вычитая это соотношение из (127.1) и вводя обозначение $Q = q - \bar{q}$, получим $\ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$. Отсюда видно, что Q есть решение однородного уравнения. Таким образом, $q = \bar{q} + Q$, т. е. *общее решение неоднородного уравнения* (127.1) *может быть представлено в виде суммы частного решения того же уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.*

2. После этих предварительных замечаний обратимся к задаче о колебаниях затухающего осциллятора при наличии внешней силы. Сначала исследуем частный случай, когда сила X меняется синусоидально, т. е. представляется выражением

$$X = X_0 \cos \omega t, \tag{127.2}$$

где X_0 и ω — постоянные. Задача сводится к решению уравнения

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X_0 \cos \omega t. \tag{127.3}$$

Среди частных решений этого уравнения есть такое, которое меняется во времени *синусоидально с частотой внешней возбуждающей силы* ω. Будем искать его в комплексной форме, что можно делать, так как все математические операции, с которыми придется иметь дело, линейны и вещественны. Заменим правую часть уравнения (127.3) на комплексную величину $X_0 e^{i\omega t}$, т. е. напишем

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X \equiv X_0 e^{i\omega t}. \tag{127.4}$$

Частное решение последнего уравнения ищем в виде $q = q_0 e^{i\omega t}$, откуда $\dot{q} = i\omega q$, $\ddot{q} = -\omega^2 q$. Подстановкой в уравнение (127.4) получаем

$$q = \frac{X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} e^{i\omega t}. \tag{127.5}$$

Это частное решение описывает так называемые *вынужденные колебания осциллятора*. Они происходят с частотой внешней возбуждающей силы ω. Добавив к частному решению (127.5) общее решение соответствующего однородного уравнения, получим

$$q = \frac{X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} e^{i\omega t} + e^{-\gamma t}(C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t). \tag{127.6}$$

Добавленное слагаемое описывает *свободные колебания* осциллятора. Выбором произвольных постоянных C_1 и C_2 можно удовлетворить любым начальным условиям. Однако, каковы бы ни были эти условия, свободные колебания всегда *экспоненциально затухают*, причем за время $\tau = 1/\gamma$ амплитуда свободных колебаний убывает в e раз. Процесс затухания свободных колебаний называется *установлением колебаний*, а время τ — *временем затухания* или *временем установления*. Если $t \gg \tau$, то свободные колебания практически совсем затухнут. Останутся одни только вынужденные колебания, *совершенно не зависящие от начальных условий.* Исследованием таких колебаний мы прежде всего и займемся.

3. Конечно, решение (127.5) лишь символически представляет вынужденное колебание. В нем должна быть оставлена *только вещественная часть.* Для нахождения последней введем обозначение

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma = \rho e^{i\delta}, \tag{127.7}$$

где ρ и δ — величины вещественные. Тогда $q = \frac{X_0}{\rho} e^{i(\omega t - \delta)}$, или в вещественной форме

$$q = a\cos(\omega t - \delta). \tag{127.8}$$

Величины ρ и δ найдем, приравнивая вещественные и мнимые части в соотношении (127.7). Таким путем получаем

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \rho\cos\delta, \qquad 2\omega\gamma = \rho\sin\delta,$$

откуда

$$a = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}, \tag{127.9}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{127.10}$$

Таким образом, *вынужденное колебание будет гармоническим, амплитуда и фаза которого определяются формулами* (127.9) и (127.10).

Формулы (127.9) и (127.10) можно получить также с помощью векторной диаграммы. Это будет сделано в § 129 на примере переменных токов, где соотношения совершенно аналогичны.

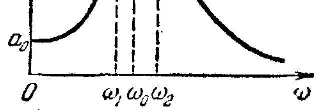

Рис. 301.

4. Исследуем сначала поведение *амплитуды* вынужденных колебаний в зависимости от частоты ω. Электрические и механические колебания будем рассматривать совместно, называя величину q либо *зарядом конденсатора,* либо *смещением колеблющегося тела из положения равновесия.* Оставляя амплитуду силы X_0 неизменной, будем менять ее частоту ω. При $\omega = 0$ получаем *статическое отклонение* под действием постоянной силы X_0: $a_0 = X_0/\omega_0$. При возрастании частоты ω амплитуда смещения a сначала также возрастает, затем проходит через максимум и, наконец, асимптотически стремится к нулю (рис. 301). Приравнивая нулю производную $da/d\omega$, убеждаемся, что амплитуда смещения (заряда) a достигает максимума при $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$. Максимумы амплитуды скорости (тока) ωa и амплитуды ускорения (напряжения $L\ddot{q}$) $\omega^2 a$ достигаются соответственно при $\omega = \omega_0$ и $\omega = \omega_0^2/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Найдем еще частоту, при которой максимальна средняя мощность, развиваемая силой X. Мощность выражается произведением силы X на скорость $\dot{q}$, т. е. равна $P = X\dot{q}$. Так как произведение гармонически колеблющихся величин X и $\dot{q}$ — нелинейная операция, то надо пользоваться вещественной формой представления колебаний, т. е. формулами (127.2) и (127.8). Из них получаем

$$P = -\omega a X_0 \cos \omega t \sin(\omega t - \delta) = \frac{\omega a X_0}{2}[\sin\delta - \sin(2\omega t - \delta)].$$

Второе слагаемое в квадратных скобках синусоидально меняется во времени с частотой 2ω. Его среднее значение по времени равно нулю. На величину средней мощности оно не влияет. Последняя определяется только первым слагаемым и равна $^1/_2 X_0 \omega a \sin\delta$. Она достигает максимума при той же частоте, что и амплитуда скорости ωa, т. е. при частоте $\omega = \omega_0$.

В наиболее важном случае, когда *затухание невелико*, положения всех максимумов *почти не отличаются* друг от друга. Поэтому за максимум амплитуды смещения можно принять ее значение при $\omega = \omega_0$, т. е.

$$a_{\text{макс}} = \frac{X_0}{2\omega_0\gamma} = \frac{\omega_0}{2\gamma} a_0. \tag{127.11}$$

Отношение максимального значения амплитуды $a_{\text{макс}}$ к статическому отклонению a_0 называется *добротностью осциллятора* или *колебательного контура*. Обозначая добротность через Q, имеем

$$\frac{a_{\text{макс}}}{a_0} \equiv Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{d}, \tag{127.12}$$

где d — логарифмический декремент.

Кривая, изображающая зависимость амплитуды колебаний a от частоты внешней возбуждающей силы ω, называется *резонансной кривой* (см. рис. 301). Одной из характеристик резонансной кривой может служить значение амплитуды в максимуме $a_{\text{макс}}$. Другой важной характеристикой является *ширина резонансной кривой*. Пусть ω_1 и ω_2 — значения частоты ω, при которых энергия колебаний вдвое меньше энергии в максимуме. Тогда

$$(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_1^2\gamma^2, \qquad (\omega_2^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_2^2\gamma^2.$$

Если $|\omega_1 - \omega_0| \ll \omega_0$, $|\omega_2 - \omega_0| \ll \omega_0$, то отсюда получаем приближенно

$$\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma = \omega_0/Q. \tag{127.13}$$

Величина $\Delta\omega$ и называется *шириной* (или *полушириной*) резонансной кривой. Мы видим, что чем больше добротность осциллятора, тем уже резонансная кривая. Далее, из формул (127.11) и (127.13) получаем

$$\Delta\omega \cdot a_{\text{макс}} = \omega_0 a_0. \tag{127.14}$$

Чем больше максимум резонансной кривой, тем он острее, т. е. тем у́же резонансная кривая.

5. Итак, наиболее интенсивные колебания будут наблюдаться при частоте $\omega = \omega_0$. Явление возбуждения сильных колебаний при частоте внешней возбуждающей силы, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется *резонансом*. Физическая причина этого явления предельно проста. Ее лучше всего пояснить не на примере синусоидально меняющейся силы, а на примере силы, состоящей из одинаковых кратковременных *толчков*, следующих друг за другом через одинаковые промежутки времени. Между двумя последовательными толчками система движется *свободно*. При каждом толчке скорость $\dot{q}$ скачкообразно получает приращение $\Delta\dot{q}$. Если толчки следуют друг за другом через промежутки времени, равные периоду собственных колебаний системы, то каждый новый толчок вызывает приращение скорости *того же знака и величины*, что и предыдущий толчок: *толчки усиливают друг друга*. В этом случае энергия, вкладываемая в систему, *максимальна*. Амплитуда колебаний будет нарастать до тех пор, пока возросшие силы трения в среднем за период колебаний не компенсируют действие каждого нового толчка. Тогда установятся наиболее интенсивные колебания, характеризующиеся *максимумом амплитуды скорости* и *максимальной энергией*. Это и есть *резонанс*. Синусоидально меняющаяся сила также может рассматриваться как последовательность одинаковых толчков. Только теперь толчки *не мгновенные, а длительные* и непрерывно примыкают друг к другу. Но это обстоятельство в приведенном объяснении не играет принципиальной роли. Естественно, что в случае толчков конечной длительности появляется зависимость формы резонансной кривой от *формы толчка*. Толчки синусоидальной формы характеризуются тем, что для них на резонансной кривой имеется *только один максимум* при $\omega = \omega_0$. Для толчков другой формы может быть и не так. Например, в разобранном выше случае последовательности мгновенных толчков максимум амплитуды появляется не только при основной частоте $\omega = \omega_0$, но и при меньших частотах $\omega_0/2$, $\omega_0/3$, ... При таких частотах толчки следуют один за другим реже. Однако они по-прежнему усиливают друг друга, а это есть основное условие резонанса. На резонансной кривой появляются новые максимумы, хотя и менее интенсивные, чем максимум при основной частоте.

6. Явление резонанса удобно демонстрировать на камертонах, так как они отличаются высокими добротностями. Возьмем два камертона с одинаковыми собственными частотами и установим их на резонансных ящиках (рис. 302). Заставим звучать один

камертон. Излучаемые им звуковые волны будут периодически воздействовать на второй камертон. Так как частоты совпадают, то наступает резонанс — второй камертон начинает колебаться и звучать. В этом можно убедиться, заглушив рукой колебания первого камертона. Тогда отчетливо слышен звук второго камертона. Для демонстрации в большой аудитории рядом с ножкой второго камертона можно подвесить на нити маленький шарик. Он отскакивает в сторону под действием ударов ножки камертона. Наденем теперь на ножку одного из камертонов небольшой грузик. Это поведет к «расстройке» камертонов — их собственные частоты перестанут совпадать. Если повторить опыт, то второй камертон уже не будет отзываться на звучание первого камертона. Этот опыт показывает, что уже ничтожная расстройка нарушает условие резонанса. Вместе с тем он позволяет судить, насколько велика добротность камертона как колебательной системы.

7. Электрическим аналогом описанного опыта может служить опыт с высокочастотными колебательными контурами. Берется генератор высокочастотных колебаний с частотой в несколько мегагерц. Емкостью колебательного контура генератора служит конденсатор переменной емкости. Последнюю можно менять поворотом специальной ручки. Возле генератора помещается второй такой же колебательный контур, в который включена электрическая лампочка от карманного фонарика. Роль резонансных ящиков выполняют металлические стержни, привинченные к пластинам конденсаторов и установленные параллельно друг другу. Этим между колебательными контурами устанавливается емкостная связь: электрические заряды одного стержня индуцируют заряды на другом стержне. Когда работает генератор, в его колебательном контуре текут токи высокой частоты, возбуждающие токи во втором колебательном контуре, содержащем лампочку накаливания. Если собственные частоты колебательных контуров различаются сильно, то лампочка не горит. Можно увеличить накал лампы генератора и тем самым увеличить амплитуду генерируемых им колебаний. Однако лампочка все равно не загорится. Но если плавно менять емкость конденсатора в одном из колебательных контуров, то в определенный момент лампочка накаливания ярко вспыхивает. Это происходит при резонансе, когда собственные частоты обоих контуров совпадают или почти совпадают между собой.

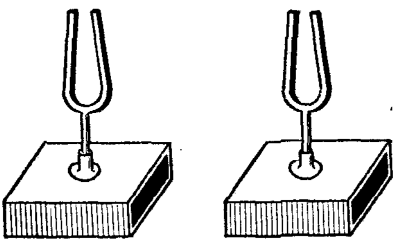

Рис. 302.

На этом примере видна польза явления резонанса. Вся техника радиоприема основана на резонансе. Для того чтобы радиоприемник «принимал радиостанцию», необходимо его «настроить», т. е. добиться совпадения собственной частоты колебательного контура радиоприемника с частотой электромагнитных волн, излучаемых работающей радиостанцией. Формула (127.12) показывает, что *чувствительность радиоприемника тем выше, чем выше добротность его колебательного контура. Чувствительность радиоприемника и полоса частот, которые он способен принимать, обратно пропорциональны друг другу и связаны между собой соотношением* (127.14). *При большой чувствительности радиоприемник способен принимать только очень узкую область частот. Чем выше чувствительность приемника, тем меньше мешают приему другие радиостанции, работающие на близких частотах.* Приемник бесконечно высокой чувствительности принимал бы только волны вполне определенной частоты, на которую он настроен. Все эти закономерности относятся не только к радиоприемнику. Они носят *общий характер* и справедливы для любых осцилляторов независимо от физической природы совершающихся колебаний.

8. Но явление резонанса может быть и вредным, и тогда с ним приходится бороться. Пятикратный и даже десятикратный запас прочности, предусматриваемый при статических расчетах механических систем, может оказаться недостаточным, если системы подвергаются действию периодических, хотя и относительно слабых сил. Так, во всех армиях мира принято правило подавать команду «вольно», когда отряд пехоты или кавалерии проходит по мосту. При прохождении «в ногу» с отбиванием шага периодические толчки, которым подвергается мост, могут попасть в такт с собственными колебаниями моста. Тогда наступает резонанс. Амплитуда колебаний моста может увеличиться настолько, что он рухнет. Такие случаи наблюдались неоднократно в прошлом столетии, что и послужило поводом для введения в войсковые уставы упомянутого выше правила. Конечно, одного совпадения частот *недостаточно* для разрушения моста. Мальчик, стреляющий по мосту из рогатки, не может рассчитывать на его разрушение, как бы идеально он ни вошел в ритм стрельбы и как бы долго ни продолжалась последняя. Существуют силы трения и другие тормозящие силы, *ограничивающие возрастание амплитуды колебаний.* Помимо совпадения частот для разрушения необходимо еще, чтобы каждый толчок был *достаточно сильным.* Точно так же в случае электрических систем при расчетах предельно допустимых напряжений, подводимых к системе, *нельзя ограничиваться статическими полями.* Если система содержит емкости и индуктивности, то во избежание электрического пробоя при расчетах необходимо считаться с возможностью резонанса.

9. Резонансная кривая, приведенная на рис. 301 и представляемая формулой (127.9), называется *амплитудной резонансной кривой*. Обратимся теперь к рассмотрению *фазовой резонансной кривой* (127.10). Она определяет угол δ, на который отстает по фазе смещение (заряд) q относительно внешней силы X. Зависимость δ от ω изображена на рис. 303. Если $\omega \to 0$, то $\delta \to 0$: при низких частотах q и X колеблются в *одинаковых фазах*. При $\omega \to \infty$ сдвиг фаз δ стремится к π — колебания совершаются в *противоположных фазах*. При резонансе $\operatorname{tg}\delta = \infty$, $\delta = \pi/2$. Если $\gamma \to 0$, то фазовая резонансная кривая претерпевает разрыв непрерывности при $\omega = \omega_0$ и переходит в ломаную $OABC$: при $\omega < \omega_0$

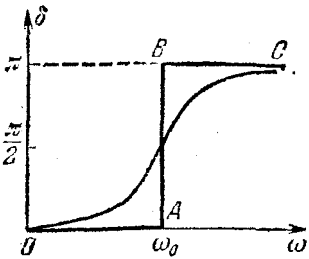

Рис. 303.

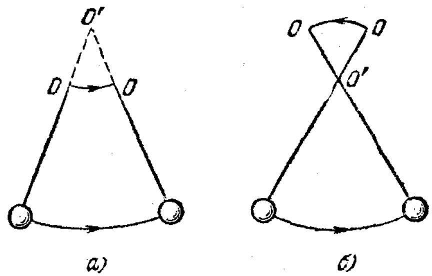

Рис. 304.

фазы колебаний q и X одинаковы, а при $\omega > \omega_0$ — противоположны. Ломаная $OABC$ представляет *предельное положение*, к которому стремятся резонансные кривые при $\gamma \to 0$.

Следующая механическая иллюстрация помогает уяснить фазовые соотношения при вынужденных колебаниях. Возьмем рукой маятник за точку O (рис. 304, *а*) и будем медленно двигать эту точку туда и обратно. Возникнут вынужденные колебания, как если бы маятник стал длиннее и был закреплен в неподвижной точке подвеса O'. В этом случае колебания руки (внешней силы) совершаются с частотой, меньшей собственной частоты ω_0 маятника. Направления движения руки и шарика маятника все время совпадают, их колебания происходят в одинаковых фазах. Не то будет, когда точка O колеблется с частотой, превышающей собственную частоту колебаний маятника. Теперь маятник колеблется так, как если бы его точка подвеса была неподвижна и смещена вниз относительно точки O: точка O и шарик маятника движутся противоположно, т. е. колеблются в противоположных фазах (рис. 304, *б*).