§ 128. Вынужденные колебания под действием несинусоидальной силы. Теорема Фурье

1. Вынужденные колебания под действием несинусоидальной силы можно исследовать с помощью математической *теоремы Фурье* (1768—1830). Согласно этой теореме всякая периодическая функция достаточно общего вида может быть разложена в *ряд Фурье*, т. е. представлена в виде суммы конечного или бесконечного числа *синусоидальных функций*. Мы не будем доказывать эту теорему, но приведем выражение для *коэффициентов* ряда Фурье.

Периодической функцией $f(t)$ называется всякая функция, при любом t удовлетворяющая условию $f(t) = f(t+T)$, где T — положительная постоянная, не равная нулю. Она называется *периодом функции* f. Если T — период, то, очевидно, $2T$, $3T$,... также будут периодами. Действительно, $f(t+2T) = f(t+T+T) = f(t+T) = f(t)$. Среди всех этих периодов можно указать *наименьший*, который называется *основным периодом*, а частота $\Omega = 2\pi/T$ — *основной частотой*. В дальнейшем под T и Ω мы будем понимать основной период и основную частоту. Теорема Фурье утверждает, что всякую периодическую функцию с основным периодом T можно представить в виде суперпозиции синусоид с периодами T, $T/2$, $T/3$, ... или с частотами $\omega_k = k\Omega$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Запишем этот ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}, \tag{128.1}$$

подразумевая, что функция $f(t)$ равна *вещественной части* ряда, стоящего справа. Для вычисления коэффициентов c_k умножим обе части соотношения (128.1) на $e^{-i\omega_m t}$ и проинтегрируем от 0 до T. Получим

$$\int_0^T f(t)\, e^{-i\omega_m t}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^T e^{i(\omega_k - \omega_m)t}\, dt.$$

В силу периодичности показательной функции

$$e^{i(\omega_k - \omega_m)T} = e^{i(k-m)T\Omega} = e^{2\pi(k-m)i} = 1.$$

Отсюда следует, что интеграл в правой части равен нулю, если $k \neq m$. Если же $k = m$, то этот интеграл равен T. Таким образом,

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-i\omega_m t}\, dt. \tag{128.2}$$

По этой формуле и можно вычислить коэффициенты ряда Фурье c_m. Интегрирование не обязательно проводить в пределах от 0 до T.

Можно взять любые пределы, лишь бы длина промежутка интегрирования была равна T.

2. Применение теоремы Фурье к задаче о вынужденных колебаниях производится по следующей схеме. Если внешняя «сила» $X(t)$, действующая на затухающий осциллятор, периодична, то ее следует разложить в ряд Фурье и решить задачу о вынужденных колебаниях для каждого члена этого ряда в отдельности. Тогда сумма таких решений и даст решение задачи о вынужденных колебаниях осциллятора под действием силы X.

Рассмотрим, например, с изложенной точки зрения явление резонанса под действием периодической силы, имеющей характер толчков (рис. 305). Пусть T — основной период, через который толчки следуют друг за другом. В разложении силы $X(t)$ будут содержаться синусоидальные члены (гармоники) с периодами T, $T/2$, $T/3$, ..., T/m, ... Резонанс на m-й гармонике получится при условии $T/m = T_0$, или $T = mT_0$, где T_0 — собственный период колебательного контура. Отсюда видно, что резонанс возникает, когда толчки следуют друг за другом не только через время T_0, но и через время $2T_0$, $3T_0$, ..., т. е. вдвое реже, втрое реже и т. д. Этот результат понятен из простых физических соображений.

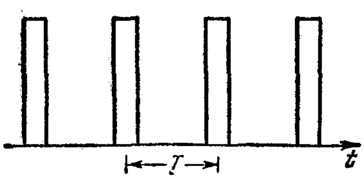

Рис. 305.

3. Для всего изложенного не имеет значения, что сила $X(t)$ является *периодической* функцией. Существенно только, что она представляется *суммой синусоидальных членов.* Допустим, например, что

$$X(t) = A(t)\cos\omega t, \qquad (128.3)$$

где функция $A(t)$ *медленно меняется во времени* (по сравнению с «быстро меняющейся» величиной $\cos\omega t$). Про колебание (128.3) говорят, что оно *модулировано по амплитуде.* Простейшей является *синусоидальная модуляция,* когда

$$A(t) = A_0(1 + \alpha\cos\Omega t) \qquad (128.4)$$

с постоянными A_0, α, Ω. Величину ω называют *несущей частотой,* α — *глубиной,* а Ω — *частотой модуляции.* В этом случае

$$X = A_0\cos\omega t + \frac{\alpha A_0}{2}[\cos(\omega+\Omega)t + \cos(\omega-\Omega)t], \qquad (128.5)$$

т. е. *синусоидально модулированное колебание эквивалентно суперпозиции трех синусоидальных колебаний с частотами* ω, $\omega+\Omega$, $\omega-\Omega$. Если эти частоты соизмеримы, то сила X периодична.

Если же они несоизмеримы, то она не периодична. Хорошей иллюстрацией может служить следующий акустический опыт. Два одинаковых камертона устанавливаются возле друг друга на резонансных ящиках (рис. 302). Мы видели (см. стр. 566), что если возбудить один камертон, то начинает звучать и другой (резонанс). Если же на ножку второго камертона надеть небольшой грузик, то он вызовет «расстройку», и второй камертон перестанет «отзываться» на колебания первого. Введем теперь между камертонами диск с отверстием и приведем его во вращение. Когда вращающееся отверстие проходит мимо отверстий резонансных ящиков, звук, воздействующий на второй камертон, усиливается, звуковая волна становится модулированной по амплитуде. Меняя частоту вращения диска, можно подобрать ее такой, чтобы второй камертон снова начал звучать, когда колеблется первый.

Модулированное колебание (128.3) часто называют *гармоническим* или *синусоидальным колебанием с переменной амплитудой.* С формально логической точки зрения такой термин внутренне противоречив, так как по самому определению амплитуда A и частота синусоиды ω — *величины постоянные.* Однако в некоторых случаях этот термин может быть оправдан. Все зависит от того, *на какую систему* (приемник) воздействует модулированная сила (128.3). Если приемник остронастроенный (т. е. его коэффициент затухания γ мал), то он будет отвечать практически на одну частоту, совпадающую с его собственной частотой ω_0. С помощью такого приемника из суперпозиции (128.5) можно выделить одновременно только колебания с частотой либо ω, либо $\omega + \Omega$, либо $\omega - \Omega$. В этом случае недопустимо функцию (128.3) отождествлять с одной синусоидой, а следует рассматривать ее как суперпозицию (128.5) трех синусоид с различными частотами. Положение меняется, когда приемник не остронастроенный. Такой приемник воспринимает одновременно *все три колебания* с частотами ω, $\omega + \Omega$, $\omega - \Omega$, и притом практически с *одним и тем же усилением.* В результате суперпозиции таких колебаний в приемнике возникает вынужденное колебание $\sim A(t)\cos\omega t$. Явление протекает так, *как если бы на приемник действовала синусоидальная сила, амплитуда которой $A(t)$ медленно менялась во времени.* То же самое можно сказать и про частотную модуляцию, когда медленно меняется не амплитуда A, а частота колебания ω. Все это справедливо только тогда, когда время установления колебаний приемника $\tau = 1/\gamma$ мало по сравнению с временем, в течение которого заметно меняются амплитуда и фаза действующей силы. За время τ вынужденные колебания в приемнике успевают установиться, тогда как A и ω практически остаются постоянными. Поэтому в течение времени установления τ сила $X = A(t)\cos[\omega(t)\,t]$ и вызывает такой же эффект, как если бы она оставалась чисто синусоидальной с постоянными $A(t)$ и $\omega(t)$.

4. Допустим теперь, что сила $X(t)$ *непериодична*, но воздействует на колебательную систему в течение *конечного времени*, например изображается функцией, показанной на рис. 306 сплошной линией. Этот случай сводится к случаю периодической силы. Для этого возьмем промежуток времени T, очень большой по сравнению с временем затухания свободных колебаний системы, и «периодически продолжим» $X(t)$, чтобы получилась периодическая функция с периодом T, как это изображено на рис. 306. Поскольку время T ничем не ограничено, его можно выбрать настолько

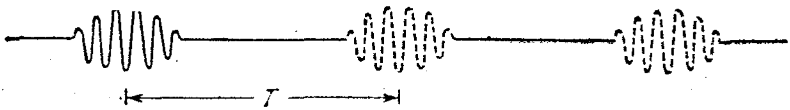

Рис. 306.

большим, чтобы замена исходной функции ее периодическим продолжением практически не отразилась на поведении колебательной системы в течение интересующего нас времени. А если выполнить предельный переход $T \to \infty$, то вспомогательная величина T вообще выпадет из результата, а самый результат сделается *вполне точным*. Разлагая периодически продолженную функцию в ряд Фурье и полагая $\Omega = 2\pi/T$, пишем

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\Omega t},$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X(t)\, e^{-in\Omega t}.$$

Для выполнения предельного перехода введем новые обозначения: $\omega = n\Omega$, $\Delta\omega = \Omega$. Тогда

$$X(t) = \sum \frac{c_n}{\Omega} e^{i\omega t} \Delta\omega.$$

Поскольку при $T \to \infty$ величины $\Delta\omega$ стремятся к нулю, заменим сумму интегралом:

$$X(t) = \int_0^{\infty} a(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \qquad (128.6)$$

где

$$a(\omega) = \lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{\Omega} = \frac{1}{T\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{-i\omega t}\, dt,$$

или

$$a(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\,e^{-i\omega t}\,dt. \qquad (128.7)$$

Формула (128.6) называется *интегралом Фурье*. Она представляет функцию $X(t)$ в виде *суперпозиции непрерывного множества синусоидальных колебаний*, частоты которых непрерывно заполняют определенный интервал. При этом подразумевается, что от правой части формулы (128.6) следует брать лишь *вещественную часть*. Разумеется, приведенные рассуждения не могут служить строгим доказательством формулы (128.6). Они устанавливают только связь между рядом и интегралом Фурье. Строгое доказательство дается в теории интеграла Фурье.

§ 129. Закон Ома для переменных токов (синусоидально меняющихся во времени)

1. Рассмотрим участок цепи, состоящий из последовательно соединенных *омического сопротивления* R, *катушки самоиндукции* L и *конденсатора* C, к концам которого приложена синусоидальная электродвижущая сила $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos\omega t$ (см. рис. 291). Найдем ток $\mathscr{I}$, который установится в цепи под действием этой электродвижущей силы. С этой целью перейдем к комплексной форме $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0 e^{i\omega t}$. Тогда заряд конденсатора в установившемся режиме представится выражением (127.5). Дифференцируя его по времени с учетом соотношений (122.7), (122.8), (122.9), находим

$$\mathscr{I}=\frac{\mathscr{E}}{Z},\qquad \mathscr{E}=\mathscr{I}Z, \qquad (129.1)$$

где введено обозначение

$$Z=R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right). \qquad (129.2)$$

Формула (129.1) называется *законом Ома для переменных (точнее, синусоидальных) токов*. Роль сопротивления играет комплексная величина Z, называемая *комплексным сопротивлением*, или *импедансом*. Физическое содержание соотношения (129.1) раскроется полностью, если представить его в вещественной форме. Вопрос сводится к определению *амплитуды* и *фазы тока*. Начнем с рассмотрения частных случаев.

2. Случай 1. Цепь не содержит конденсатора и катушки самоиндукции. При отсутствии самоиндукции $L=0$. Отсутствие конденсатора означает, что точки *3* и *4* на рис. 291 сливаются в одну точку, т. е. напряжение между этими точками все время равно нулю. Поэтому член q/C в уравнении (122.5) следует опустить, что можно сделать формально, полагая $C=\infty$, а не $C=0$, как