или

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \tag{128.7}$$

Формула (128.6) называется *интегралом Фурье*. Она представляет функцию $X(t)$ в виде *суперпозиции непрерывного множества синусоидальных колебаний*, частоты которых непрерывно заполняют определенный интервал. При этом подразумевается, что от правой части формулы (128.6) следует брать лишь *вещественную часть*. Разумеется, приведенные рассуждения не могут служить строгим доказательством формулы (128.6). Они устанавливают только связь между рядом и интегралом Фурье. Строгое доказательство дается в теории интеграла Фурье.

§ 129. Закон Ома для переменных токов (синусоидально меняющихся во времени)

1. Рассмотрим участок цепи, состоящий из последовательно соединенных *омического сопротивления* R, *катушки самоиндукции* L и *конденсатора* C, к концам которого приложена синусоидальная электродвижущая сила $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t$ (см. рис. 291). Найдем ток $\mathscr{I}$, который установится в цепи под действием этой электродвижущей силы. С этой целью перейдем к комплексной форме $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{i\omega t}$. Тогда заряд конденсатора в установившемся режиме представится выражением (127.5). Дифференцируя его по времени с учетом соотношений (122.7), (122.8), (122.9), находим

$$\mathscr{I} = \frac{\mathscr{E}}{Z}, \qquad \mathscr{E} = \mathscr{I} Z, \tag{129.1}$$

где введено обозначение

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{129.2}$$

Формула (129.1) называется *законом Ома для переменных (точнее, синусоидальных) токов*. Роль сопротивления играет комплексная величина Z, называемая *комплексным сопротивлением*, или *импедансом*. Физическое содержание соотношения (129.1) раскроется полностью, если представить его в вещественной форме. Вопрос сводится к определению *амплитуды* и *фазы тока*. Начнем с рассмотрения частных случаев.

2. Случай 1. Цепь не содержит конденсатора и катушки самоиндукции. При отсутствии самоиндукции $L = 0$. Отсутствие конденсатора означает, что точки *3* и *4* на рис. 291 сливаются в одну точку, т. е. напряжение между этими точками все время равно нулю. Поэтому член q/C в уравнении (122.5) следует опустить, что можно сделать формально, полагая $C = \infty$, а не $C = 0$, как могло показаться на первый взгляд. В результате формула (129.1) переходит в обычный закон Ома $\mathscr{E} = R\mathscr{I}$ — между током и напряжением *нет сдвига фаз.*

3. Случай 2. Цепь не содержит конденсатора и омического сопротивления ($R = 1/C = 0$). В этом случае

$$Z = i\omega L, \qquad \mathscr{E} = i\omega L\mathscr{I}. \tag{129.3}$$

Импеданс Z *чисто мнимый.* Это значит, что сдвиг фаз между током и напряжением равен 90°. Действительно,

$$\mathscr{E} = \omega L\mathscr{I}e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \text{или} \quad \mathscr{E} = \omega L\mathscr{I}_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

В вещественной форме

$$\mathscr{E} = \omega L\mathscr{I}_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \mathscr{I} = \mathscr{I}_0 \cos \omega t.$$

Отсюда видно, что *ток отстает от напряжения по фазе на* $\pi/2$.

Амплитуда тока связана с амплитудой напряжения соотношением $\mathscr{E}_0 = \omega L\mathscr{I}_0$. Величина ωL (или $i\omega L$) называется *индуктивным сопротивлением.* Индуктивное сопротивление тём больше, чем больше частота ω и индуктивность катушки L. Для увеличения индуктивного сопротивления в катушку самоиндукции вводят железный сердечник, состоящий из железных полос или проволок, изолированных друг от друга, например, лаком. Такая катушка называется *дросселем.*

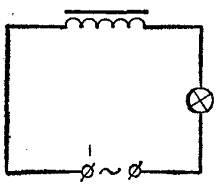

Рис. 307.

Соберем схему, состоящую из последовательно соединенных лампового реостата и дросселя (рис. 307). Вынем из дросселя железный сердечник и подберем сопротивление лампового реостата таким, чтобы лампы горели нормальным накалом. Затем вдвинем железный сердечник. При этом увеличивается индуктивное сопротивление, а ток уменьшается. В результате лампы начинают гореть более тускло и даже могут совсем погаснуть. Если переключить цепь на постоянное напряжение, то вдвигание и выдвигание сердечника не будет влиять на силу тока и накал ламп.

При высоких частотах, даже когда величина L ничтожна, индуктивное сопротивление ωL может значительно превзойти омическое. Соединим концы толстого медного стержня (диаметром около 5 мм), согнутого в дугу, с источником тока высокой частоты (порядка мегагерца). Параллельно дуге включим обычную лампочку накаливания с сопротивлением около 100 Ом (рис. 308). По сравнению с ним омическое сопротивление дуги (для постоянного тока $\sim 0{,}001$ Ом) ничтожно. Несмотря на это, дуга не закорачивает лампочку. Последняя горит ярко, что объясняется большим индуктивным сопротивлением дуги.

4. Случай 3. Цепь не содержит катушки самоиндукции и омического сопротивления. В этом случае

$$Z = -\frac{i}{\omega C}, \quad \mathcal{E} = -\frac{i}{\omega C}\mathcal{J}, \quad \mathcal{J} = i\omega C\mathcal{E}. \qquad (129.4)$$

Отсюда видно, что ток опережает по фазе напряжение на $\pi/2$. Амплитуда тока связана с амплитудой напряжения соотношением $\mathcal{J}_0 = \omega C\mathcal{E}_0$. Величина $1/(\omega C)$ (или $-i/(\omega C)$) называется *емкостным сопротивлением.* Емкостное сопротивление тем меньше, чем больше емкость конденсатора. И без вычислений ясно, что конденсатор

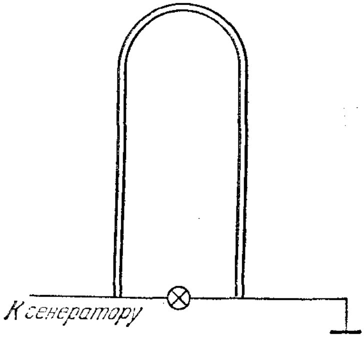

Рис. 308.

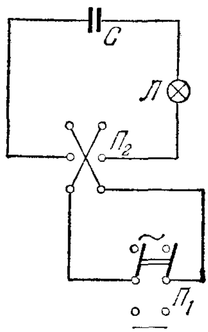

Рис. 309.

бесконечно большой емкости не будет оказывать никакого сопротивления переменному току. При прохождении переменного тока на обкладках конденсатора накапливались бы электрические заряды противоположных знаков. Однако при $C = \infty$ это не привело бы к возникновению напряжения между обкладками ($V = q/C = 0$). В этом отношении конденсатор бесконечно большой емкости ведет себя так же, как кусок проволоки, не обладающий омическим сопротивлением.

Соберем схему, изображенную на рис. 309. Перекинем переключатель $П_1$ на постоянный ток. Лампа $Л$ гореть не будет, так как конденсатор C оказывает ей бесконечно большое сопротивление. Будем изменять направление тока с помощью переключателя $П_2$. При каждом переключении через лампу проходит зарядный или разрядный ток конденсатора, и она вспыхивает. При достаточно частом переключении получается переменный ток, и лампа горит почти полным накалом. При перекидывании переключателя $П_1$ на переменный ток лампа $Л$ горит ровно и ярко. Если увеличить емкость конденсатора C, то уменьшится емкостное сопротивление, и лампа будет гореть еще ярче. Уменьшение емкости конденсатора приводит к обратному эффекту.

5. Исследуем теперь общий случай, когда R, L, C произвольны. Импеданс Z представим в виде

$$Z = \rho e^{i\delta},$$

где ρ и δ — величины вещественные. Тогда

$$\mathscr{I} = \frac{\mathscr{E}}{Z} = \frac{\mathscr{E}_0}{\rho} e^{i(\omega t - \delta)} = \mathscr{I}_0 e^{i(\omega t - \delta)},$$

или в вещественной форме

$$\mathscr{I} = \frac{\mathscr{E}_0}{\rho} \cos(\omega t - \delta).$$

Ток отстает по фазе от напряжения на δ. Для вычисления ρ и δ воспользуемся формулой (129.2). Она дает

$$\rho e^{i\delta} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Приравнивая вещественные и мнимые части, получим

$$\rho \cos\delta = R, \qquad \rho \sin\delta = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Отсюда

$$\rho^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2, \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{129.5}$$

В результате получаем

$$\mathscr{I} = \frac{\mathscr{E}_0 \cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{129.6}$$

Эта формула совместно с формулой (129.5) выражает закон Ома для переменных токов *в вещественной форме*. По сравнению с вещественной комплексная форма того же закона

$$\mathscr{I} = \frac{\mathscr{E}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \tag{129.7}$$

более компактна и лучше приспособлена для вычислений.

6. Закон Ома для переменных токов можно представить также на векторной диаграмме. С этой целью перепишем предыдущую формулу в виде

$$R\mathscr{I} + i\omega L\mathscr{I} - \frac{i}{\omega C}\mathscr{I} = \mathscr{E}. \tag{129.8}$$

Она означает, что сумма падений напряжения на омическом сопротивлении, катушке самоиндукции и конденсаторе равна внешнему приложенному напряжению. В методе векторных диаграмм все эти напряжения должны рассматриваться не как числа, а как *векторы*. Падение напряжения на омическом сопротивлении $R\mathscr{I}$ откладывается вдоль оси X, падения напряжения на катушке самоиндукции $\mathscr{I}\omega L$ и конденсаторе $\mathscr{I}/(\omega C)$ — вдоль оси Y: первое в положительном, второе — в отрицательном направлениях (рис. 310). Векторная диаграмма позволяет определить амплитуду и фазу колебаний. Амплитуда колебаний тока найдется из прямоугольного треугольника OAB по теореме Пифагора:

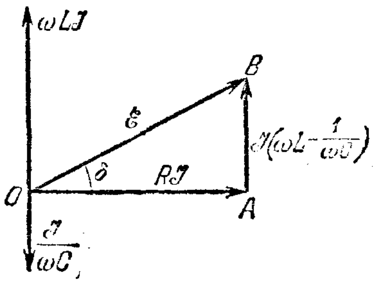

Рис. 310.

$$(R\mathscr{I}_0)^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\mathscr{I}_0^2=\mathscr{E}_0^2.$$

Из того же треугольника легко найти тангенс угла сдвига фаз δ. В результате получаются прежние формулы (129.5) и (129.6).

Квадратный корень, стоящий в знаменателе формулы (129.6), называется *полным сопротивлением цепи*. Омическое сопротивление R называют *активным сопротивлением*, а величину $\omega L-\frac{1}{\omega C}$ — *реактивным сопротивлением*. Впрочем, реактивным сопротивлением иногда называют саму мнимую часть импеданса $i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$.

7. Допустим, что при неизменном внешнем напряжении $\mathscr{E}_0\cos(\omega t+\delta)$ меняются параметры L и C. Когда реактивное сопротивление $\omega L-\frac{1}{\omega C}$ обратится в нуль, полное сопротивление достигнет минимума R. Это произойдет при резонансной частоте $\omega=\omega_0\equiv 1/\sqrt{LC}$. Тогда амплитуда тока станет максимальной: $\mathscr{I}_{0\,макс}=\mathscr{E}_0/R$. Общее падение напряжения в цепи будет равно падению напряжения на омическом сопротивлении $V_R=R\mathscr{I}$. Суммарное падение напряжения на конденсаторе и катушке самоиндукции обратится в нуль: $V_L+V_C=0$, т. е. напряжения V_L и V_C будут равны по величине и противоположны по фазе. Таким образом, при резонансе

$$\left|\frac{V_L}{V_R}\right|=\left|\frac{V_C}{V_R}\right|=\frac{\omega L}{R}=\frac{\omega}{2\gamma}=Q. \qquad (129.9)$$

При больших добротностях Q напряжения V_L и V_C могут во много раз превзойти напряжение на омическом сопротивлении, а следовательно, и общее напряжение в цепи $\mathscr{E}$. Это явление называется *резонансом напряжений.* При расчете изоляции электрических линий, содержащих емкости и самоиндукции, это явление необходимо учитывать. Иначе может получиться пробой линии.

Для демонстрации явления резонанса напряжений колебательный контур собирается из магазина емкостей C и катушки самоиндукции L с железным сердечником, который можно вдвигать в катушку и выдвигать и тем самым менять ее индуктивность L (рис. 311). В качестве сопротивления R служит электрическая лампочка или несколько лампочек, соединенных параллельно.

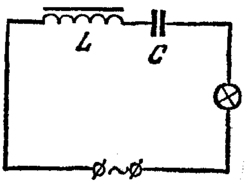

Рис. 311.

С помощью четырех вольтметров, не показанных на рисунке, можно одновременно измерять напряжения V_L, V_C, V_R (точнее, их амплитуды), а также входное напряжение $\mathscr{E}$. Опыт показывает, что при включении переменного тока напряжение V_R на сопротивлении R меньше входного напряжения $\mathscr{E}$: часть напряжения падает на реактивном сопротивлении. Поэтому лампы горят сравнительно тускло, а амплитуды напряжений V_L и V_C отличаются друг от друга. Изменяя самоиндукцию L или емкость C, можно добиться того, чтобы напряжения V_L и V_C сделались по амплитуде почти одинаковыми. Так как их фазы противоположны, то реактивное сопротивление обращается в нуль, сила тока достигает максимума, и лампа начинает гореть ярко. При этом напряжения V_L и V_C намного превосходят внешнее напряжение $\mathscr{E}$. Получился резонанс напряжений.

§ 130. Правила Кирхгофа для переменных токов

1. *К переменным токам без всяких изменений применимо первое правило Кирхгофа.* Действительно, точки схождения проводов обладают пренебрежимо малыми емкостями, в них не могут накапливаться электрические заряды. Поэтому в любой момент времени сумма сил токов, подходящих к точке разветвления, должна равняться сумме сил токов, отходящих от нее. *Второе правило Кирхгофа также применимо к синусоидальным переменным токам, если омические сопротивления R всюду заменить на соответствующие комплексные сопротивления (импедансы) Z.* Это правило непосредственно следует из уравнения Максвелла

$$\oint E_l\,dl = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Для доказательства выделим в разветвленной сети какой-либо замкнутый контур, например контур, изображенный на рис. 312. Предположим, что выполнено условие квазистационарности. Тогда