резонансом напряжений. При расчете изоляции электрических линий, содержащих емкости и самоиндукции, это явление необходимо учитывать. Иначе может получиться пробой линии.

Для демонстрации явления резонанса напряжений колебательный контур собирается из магазина емкостей C и катушки самоиндукции L с железным сердечником, который можно вдвигать в катушку и выдвигать и тем самым менять ее индуктивность L (рис. 311). В качестве сопротивления R служит электрическая лампочка или несколько лампочек, соединенных параллельно. С помощью четырех вольтметров, не показанных на рисунке, можно одновременно измерять напряжения V_L, V_C, V_R (точнее, их амплитуды), а также входное напряжение $\mathscr{E}$. Опыт показывает, что при включении переменного тока напряжение V_R на сопротивлении R меньше входного напряжения $\mathscr{E}$: часть напряжения падает на реактивном сопротивлении. Поэтому лампы горят сравнительно тускло, а амплитуды напряжений V_L и V_C отличаются друг от друга. Изменяя самоиндукцию L или емкость C, можно добиться того, чтобы напряжения V_L и V_C сделались по амплитуде почти одинаковыми. Так как их фазы противоположны, то реактивное сопротивление обращается в нуль, сила тока достигает максимума, и лампа начинает гореть ярко. При этом напряжения V_L и V_C намного превосходят внешнее напряжение $\mathscr{E}$. Получился резонанс напряжений.

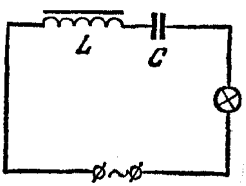

Рис. 311.

§ 130. Правила Кирхгофа для переменных токов

1. *К переменным токам без всяких изменений применимо первое правило Кирхгофа.* Действительно, точки схождения проводов обладают пренебрежимо малыми емкостями, в них не могут накапливаться электрические заряды. Поэтому в любой момент времени сумма сил токов, подходящих к точке разветвления, должна равняться сумме сил токов, отходящих от нее. *Второе правило Кирхгофа также применимо к синусоидальным переменным токам, если омические сопротивления R всюду заменить на соответствующие комплексные сопротивления (импедансы) Z.* Это правило непосредственно следует из уравнения Максвелла

$$\oint E_l\,dl = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Для доказательства выделим в разветвленной сети какой-либо замкнутый контур, например контур, изображенный на рис. 312. Предположим, что выполнено условие квазистационарности. Тогда предыдущее уравнение для выделенного контура запишется в виде

$$\sum_k \left(\mathcal{J}_k R_k + \frac{q_k}{C_k} - \mathscr{E}_k\right) = -\sum L_k \frac{d\mathcal{J}_k}{dt}.$$

Приложенные напряжения $\mathscr{E}_k$ считаются положительными, если при обходе контура источник тока проходится от отрицательного полюса к положительному. Написанное уравнение справедливо и для неустановившихся процессов, причем электродвижущие силы $\mathscr{E}_k$ могут меняться во времени как угодно. Допустим теперь, что все электродвижущие силы $\mathscr{E}_k$ меняются во времени синусоидально, т. е. в комплексной форме $\mathscr{E}_k \sim e^{i\omega t}$. Тогда в случае установившихся процессов заряды q_k и токи $\mathcal{J}_k = \dot{q}_k$ будут меняться во времени так же, а предыдущее уравнение перейдет в

$$\sum_k \mathcal{J}_k \left(R_k + i\omega L_k - \frac{i}{\omega C_k}\right) = \sum_k \mathscr{E}_k,$$

или

$$\sum Z_k \mathcal{J}_k = \sum \mathscr{E}_k, \qquad (130.1)$$

а это и есть второе правило Кирхгофа.

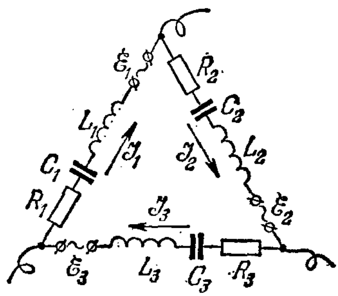

Рис. 312.

2. Все результаты, полученные формальным применением правил Кирхгофа к постоянным токам, в комплексной форме сохраняют силу и для установившихся синусоидальных токов. В частности, при параллельном соединении нескольких комплексных сопротивлений результирующее комплексное сопротивление определяется формулой

$$\frac{1}{Z} = \sum \frac{1}{Z_k}. \qquad (130.2)$$

Рассмотрим частный случай, когда соединены параллельно катушка самоиндукции и конденсатор (рис. 313). По первому правилу Кирхгофа

$$\mathcal{J} + \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1.$$

По второму правилу

$$i\omega L \mathcal{J}_1 - i\,\frac{\mathcal{J}_2}{\omega C} = 0.$$

Исключим из этих уравнений, например, ток $\mathcal{J}_2$. Получим

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 (1 - \omega^2 LC),$$

или

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right). \qquad (130.3)$$

Если $\omega = \omega_0$, то $\mathscr{I} = 0$, и, следовательно, $\mathscr{I}_1 = \mathscr{I}_2$. Токи $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$ могут быть отличны от нуля. Однако колебания в контуре становятся совершенно независимыми от внешнего тока. Причина всего этого в том, что при $\omega = \omega_0$ (т. е. при $\omega L = 1/(\omega C)$) комплексное сопротивление Z контура обращается в бесконечность, как в этом легко убедиться с помощью формулы (130.2). Контур ведет себя как непроницаемая пробка, через которую внешний ток пройти не может, а в катушке могут совершаться только свободные колебания. Амплитуды этих колебаний легко найти из условия, что напряжение на конденсаторе или на катушке самоиндукции в любой момент времени должно равняться внешнему приложенному напряжению $\mathscr{E}$. Это дает

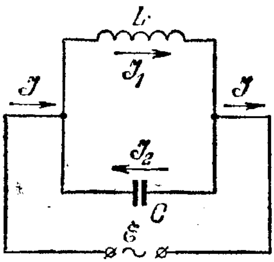

Рис. 313.

$$\mathscr{I}_1 = \frac{\mathscr{E}}{i\omega L}, \qquad \mathscr{I}_2 = -\frac{\mathscr{E}}{-i/(\omega C)} = \frac{\mathscr{E}}{i\omega L}.$$

Возникает вопрос, как в колебательном контуре могли появиться токи $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$, если его сопротивление переменному току бесконечно велико. На этот вопрос законы и соотношения, которыми мы пользовались, ответа дать не могут, так как они относятся *только к установившимся состояниям*. Последние устанавливаются в результате *переходных процессов*. Во время переходных процессов ток во внешней цепи не равен нулю, в колебательный контур поступают токи и заряды, идет накопление электромагнитной энергии. Это происходит до тех пор, пока в любой момент времени напряжения на конденсаторе и катушке самоиндукции не уравновесят внешнее приложенное напряжение. Когда это произойдет, дальнейшее поступление новых зарядов и токов в колебательный контур прекратится. Начнут совершаться свободные колебания, как если бы контур был *автономной колебательной системой*. Однако эта автономия сохраняется только до тех пор, пока внешняя электродвижущая сила $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t$ остается неизменной. Если изменить амплитуду $\mathscr{E}_0$, то $\mathscr{E}$ перестанет уравновешивать напряжения на конденсаторе и катушке самоиндукции. Появится ток во внешней цепи, и начнется новый процесс установления колебаний.

Разумеется, без поступления энергии извне незатухающие колебания возможны только тогда, когда омическое сопротивление контура равно нулю. Учтем теперь омическое сопротивление. Обозначим буквой R омическое сопротивление катушки самоиндукции. Омическим сопротивлением всех остальных проводов пренебрежем. Тогда

$$\mathscr{I}_1 = \frac{\mathscr{E}}{R + i\omega L}, \qquad \mathscr{I}_2 = -i\omega C\mathscr{E},$$

$$\mathscr{I} = \mathscr{I}_1 - \mathscr{I}_2 = \frac{R - i\omega L + i\omega^2 L^2 \omega C + i\omega C R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}\,\mathscr{E}.$$

При резонансе $\omega = \omega_0$ и, следовательно, $\omega C = 1/(\omega L)$. В этом случае

$$\mathscr{I} = \frac{R + iR\dfrac{R}{\omega L}}{R^2 + \omega^2 L^2}\mathscr{E}.$$

Пусть сопротивление R пренебрежимо мало по сравнению с индуктивным сопротивлением ωL. Тогда

$$\mathscr{I} \approx \frac{R}{\omega^2 L^2}\mathscr{E} = i\,\frac{2\gamma}{\omega}\mathscr{I}_1 = i\,\frac{\mathscr{I}_1}{Q}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\mathscr{I}_1}{\mathscr{I}}\right| = Q.$$

Чем больше добротность колебательного контура, тем меньше ток $\mathscr{I}$ в общей цепи. Таким образом, при $\omega = \omega_0$ малым током $\mathscr{I}$ в колебательном контуре большой добротности можно возбудить и поддерживать большие токи. Это явление называется *резонансом токов*. Его можно наблюдать, если в схему рис. 313 ввести амперметры для измерения токов $\mathscr{I}$, $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$. Вдали от резонанса токи $\mathscr{I}$, $\mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_2$ не очень сильно отличаются по величине. Изменением индуктивности катушки или емкости конденсатора настроим колебательный контур в резонанс. Токи $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$ при этом сделаются почти одинаковыми, а ток $\mathscr{I}$ — близким к нулю.

§ 131. Эффективные напряжение и ток

1. Сдвиг фаз между током и напряжением влияет на *работу и мощность переменного тока*. Работа δA, совершаемая электродвижущей силой $\mathscr{E}$ за время dt, определяется выражением $\delta A = \mathscr{E}\,dq$, где dq — заряд, прошедший через поперечное сечение провода за это время. Мгновенная мощность будет

$$P = \mathscr{E}\frac{dq}{dt} = \mathscr{E}\mathscr{I}. \qquad (131.1)$$

Поскольку операция умножения нелинейна, пользоваться комплексными выражениями так, как это делалось до сих пор, нельзя. Надо перейти к вещественной форме, т. е. в случае синусоидальных токов положить

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\cos\omega t, \qquad \mathscr{I} = \mathscr{I}_0\cos(\omega t - \delta). \qquad (131.2)$$

Но обычно проще проводить вычисления в комплексной форме, применяя следующий прием. Обозначим через $\mathscr{E}^*$ и $\mathscr{I}^*$ величины, комплексно сопряженные с $\mathscr{E}$ и $\mathscr{I}$. Тогда

$$\operatorname{Re}\mathscr{E} = {}^1\!/_2(\mathscr{E} + \mathscr{E}^*), \qquad \operatorname{Re}\mathscr{I} = {}^1\!/_2(\mathscr{I} + \mathscr{I}^*).$$