При резонансе $\omega = \omega_0$ и, следовательно, $\omega C = 1/(\omega L)$. В этом случае

$$\mathcal{I} = \frac{R + iR\dfrac{R}{\omega L}}{R^2+\omega^2 L^2}\mathcal{E}.$$

Пусть сопротивление R пренебрежимо мало по сравнению с индуктивным сопротивлением ωL. Тогда

$$\mathcal{I} \approx \frac{R}{\omega^2 L^2}\mathcal{E} = i\,\frac{2\gamma}{\omega}\,\mathcal{I}_1 = i\,\frac{\mathcal{I}_1}{Q}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\mathcal{I}_1}{\mathcal{I}}\right| = Q.$$

Чем больше добротность колебательного контура, тем меньше ток $\mathcal{I}$ в общей цепи. Таким образом, при $\omega = \omega_0$ малым током $\mathcal{I}$ в колебательном контуре большой добротности можно возбудить и поддерживать большие токи. Это явление называется *резонансом токов*. Его можно наблюдать, если в схему рис. 313 ввести амперметры для измерения токов $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$. Вдали от резонанса токи $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ не очень сильно отличаются по величине. Изменением индуктивности катушки или емкости конденсатора настроим колебательный контур в резонанс. Токи $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ при этом сделаются почти одинаковыми, а ток $\mathcal{I}$ — близким к нулю.

§ 131. Эффективные напряжение и ток

1. Сдвиг фаз между током и напряжением влияет на *работу и мощность переменного тока.* Работа δA, совершаемая электродвижущей силой $\mathcal{E}$ за время dt, определяется выражением $\delta A = \mathcal{E}\,dq$, где dq — заряд, прошедший через поперечное сечение провода за это время. Мгновенная мощность будет

$$P = \mathcal{E}\frac{dq}{dt} = \mathcal{E}\mathcal{I}. \tag{131.1}$$

Поскольку операция умножения нелинейна, пользоваться комплексными выражениями так, как это делалось до сих пор, нельзя. Надо перейти к вещественной форме, т. е. в случае синусоидальных токов положить

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\cos\omega t, \qquad \mathcal{I} = \mathcal{I}_0\cos(\omega t - \delta). \tag{131.2}$$

Но обычно проще проводить вычисления в комплексной форме, применяя следующий прием. Обозначим через $\mathcal{E}^*$ и $\mathcal{I}^*$ величины, комплексно сопряженные с $\mathcal{E}$ и $\mathcal{I}$. Тогда

$$\operatorname{Re}\mathcal{E} = {}^1\!/_2\,(\mathcal{E} + \mathcal{E}^*), \qquad \operatorname{Re}\mathcal{I} = {}^1\!/_2\,(\mathcal{I} + \mathcal{I}^*).$$

Подставляя эти вещественные величины в формулу (131.1), получим

$$P = {}^1/_4\,(\mathscr{E}\mathscr{I}^* + \mathscr{E}^*\mathscr{I}) + {}^1/_4\,(\mathscr{E}\mathscr{I} + \mathscr{E}^*\mathscr{I}^*). \qquad (131.3)$$

Здесь уже можно положить $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{i\omega t}$, $\mathscr{I} = \mathscr{I}_0 e^{i(\omega t - \delta)}$ и воспользоваться формулой $\cos\alpha = {}^1/_2\,(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$. В результате получится

$$P = {}^1/_2\mathscr{E}_0\mathscr{I}_0\cos\delta + {}^1/_2\mathscr{E}_0\mathscr{I}_0\cos(2\omega t - \delta).$$

Это выражение, конечно, легко получить и без использования комплексных выражений. Второе слагаемое в последней формуле быстро колеблется во времени с удвоенной частотой 2ω. Среднее значение его по времени равно нулю. Первое слагаемое от времени не зависит и дает *среднюю мощность переменного тока*:

$$\bar{P} = {}^1/_2\mathscr{E}_0\mathscr{I}_0\cos\delta. \qquad (131.4)$$

Величины $\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{I}_0$ называются *амплитудными значениями напряжения и тока*. Вместо них в электротехнике чаще употребляют *эффективные значения*, определяемые выражениями

$$\mathscr{E}^2_{\text{эфф}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{E}^2\,dt, \qquad \mathscr{I}^2_{\text{эфф}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{I}^2\,dt. \qquad (131.5)$$

Для синусоидальных токов

$$\mathscr{E}_{\text{эфф}} = \mathscr{E}_0/\sqrt{2}, \qquad \mathscr{I}_{\text{эфф}} = \mathscr{I}_0/\sqrt{2}. \qquad (131.6)$$

С введением этих величин формула для средней мощности переменного тока принимает вид

$$\bar{P} = \mathscr{E}_{\text{эфф}}\mathscr{I}_{\text{эфф}}\cos\delta. \qquad (131.7)$$

2. Аналогичным образом разность фаз δ сказывается на *взаимодействии переменных токов*. Рассмотрим, например, переменные токи $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$, текущие вдоль бесконечно длинных прямолинейных проводов, находящихся на расстоянии r друг от друга. Мгновенная сила, действующая на единицу длины каждого провода, определяется выражением

$$F = \frac{2\mathscr{I}_1\mathscr{I}_2}{cr}\,\mu.$$

(Здесь применяется гауссова система единиц.) Если токи $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$ синусоидальны, а сдвиг фаз между ними равен δ, то для средней силы отсюда находим

$$\bar{F} = \frac{2\mu}{cr}\,\mathscr{I}_{1\,\text{эфф}}\mathscr{I}_{2\,\text{эфф}}\cos\delta. \qquad (131.8)$$

В зависимости от разности фаз δ средняя сила $\bar{F}$ может быть либо силой притяжения, либо силой отталкивания. Если $\delta = \pi/2$, то $\bar{F} = 0$.

Примером может служить опыт Элиу Томсона, описанный в § 65. Если $\mathcal{I}$ — ток в обмотке электромагнита, то магнитный поток, пронизывающий алюминиевое кольцо, будет $\Phi = L_{12}\mathcal{I}$. Допустим, что $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 e^{i\omega t}$. Тогда электродвижущая сила индукции в кольце $\mathcal{E}^{\text{инд}} = -d\Phi/dt = -i\omega L_{12}\mathcal{I}$, а ток

$$\mathcal{I}' = -\frac{i\omega L_{12}\mathcal{I}}{R + i\omega L}.$$

Здесь L — индуктивность, а R — омическое сопротивление кольца. Если R пренебрежимо мало по сравнению с индуктивным сопротивлением ωL, то

$$\mathcal{I}' = -\frac{L_{12}}{L}\mathcal{I}.$$

Так как коэффициенты L_{12} и L положительны, то фазы токов $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}'$ противоположны: $\delta = \pi$. Средняя сила взаимодействия кольца и электромагнита будет *отталкивательной*.

§ 132. Процессы установления колебаний

В общем случае колебания под действием внешней силы слагаются из вынужденных и свободных (см. § 127). Собственные колебания затухают, если время t, прошедшее с момента начала действия силы, велико по сравнению с временем затухания $\tau = 1/\gamma$. Исследуем теперь этот вопрос более подробно. Для простоты проведем вычисления в предположении, что коэффициент затухания γ равен нулю. Понятно, что в этом случае процесс установления колебаний никогда не закончится, так как $\tau = 1/\gamma = \infty$. Однако, получив решение для $\gamma = 0$, легко понять качественно, что будет при $\gamma \neq 0$.

Предположим, что на гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ начинает действовать периодическая «сила» $f = f_0 \cos \omega t$. Тогда при $t > 0$ колебания будут описываться уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t.$$

Если $\omega \neq \omega_0$, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t.$$

Постоянные a и b определяются начальными условиями. Допустим, что в начальный момент $t = 0$ координата x и скорость $\dot{x}$ равны нулю. Чтобы удовлетворить первому условию, необходимо положить $a = -f_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$. После этого второе условие будет удовлетворено, если $b = 0$. Решение, удовлетворяющее обоим