

Примером может служить опыт Элиу Томсона, описанный в § 65. Если \mathcal{I} — ток в обмотке электромагнита, то магнитный поток, пронизывающий алюминиевое кольцо, будет $\Phi = L_{12}\mathcal{I}$. Допустим, что $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 e^{i\omega t}$. Тогда электродвижущая сила индукции в кольце $\mathcal{E}^{\text{инд}} = -d\Phi/dt = -i\omega L_{12}\mathcal{I}$, а ток

$$\mathcal{I}' = -\frac{i\omega L_{12}\mathcal{I}}{R + i\omega L}.$$

Здесь L — индуктивность, а R — омическое сопротивление кольца. Если R пренебрежимо мало по сравнению с индуктивным сопротивлением ωL , то

$$\mathcal{I}' = -\frac{L_{12}}{L}\mathcal{I}.$$

Так как коэффициенты L_{12} и L положительны, то фазы токов \mathcal{I} и \mathcal{I}' противоположны: $\delta = \pi$. Средняя сила взаимодействия кольца и электромагнита будет *отталкивательной*.

§ 132. Процессы установления колебаний

В общем случае колебания под действием внешней силы слагаются из вынужденных и свободных (см. § 127). Собственные колебания затухают, если время t , прошедшее с момента начала действия силы, велико по сравнению с временем затухания $\tau = 1/\gamma$. Исследуем теперь этот вопрос более подробно. Для простоты проведем вычисления в предположении, что коэффициент затухания γ равен нулю. Понятно, что в этом случае процесс установления колебаний никогда не закончится, так как $\tau = 1/\gamma = \infty$. Однако, получив решение для $\gamma = 0$, легко понять качественно, что будет при $\gamma \neq 0$.

Предположим, что на гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ начинает действовать периодическая «сила» $f = f_0 \cos \omega t$. Тогда при $t > 0$ колебания будут описываться уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t.$$

Если $\omega \neq \omega_0$, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t.$$

Постоянные a и b определяются начальными условиями. Допустим, что в начальный момент $t = 0$ координата x и скорость \dot{x} равны нулю. Чтобы удовлетворить первому условию, необходимо положить $a = -f_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$. После этого второе условие будет удовлетворено, если $b = 0$. Решение, удовлетворяющее обоим

условиям, запишется в виде

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \quad (132.1)$$

Получилась суперпозиция двух гармонических колебаний: собственного с частотой ω_0 и вынужденного с частотой ω . С суперпозицией гармонических колебаний разных частот приходится встречаться в самых разнообразных явлениях. Примером могут служить два звучащих камертона с разными собственными частотами. Особое значение имеет случай, когда частоты ω и ω_0 отличаются друг от друга мало. В этом случае выражение (132.1) целесообразно преобразовать к виду

$$x = A(t) \sin \bar{\omega} t, \quad (132.2)$$

где

$$A(t) = \frac{\pm 2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega_m t, \quad (132.3)$$

$$\bar{\omega} = 1/2 (\omega + \omega_0), \quad \omega_m = 1/2 |\omega - \omega_0|. \quad (132.4)$$

Колебание, представляемое выражением (132.2), есть *амплитудно-модулированное колебание* с несущей частотой, равной «средней

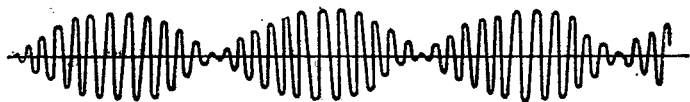


Рис. 314.

частоте» ω , и «частотой модуляции» ω_m . Общий вид его представлен на рис. 314. В случае гармонических колебаний воздуха, возбуждаемых двумя камертонами, ухо обычно воспринимает результирующее колебание как гармоническое колебание с «переменной амплитудой» (см. § 126). Ухо слышит музыкальный тон, интенсивность которого периодически меняется с периодом $T_6 = \pi/\omega_m$ и частотой $\omega_6 = 2\pi/T_6 = 2\omega_m = |\omega - \omega_0|$. Это явление называется *биениями*, а величины T_6 и ω_6 — *периодом и частотой биений* соответственно. То обстоятельство, что ухо воспринимает биения как музыкальный тон периодически меняющейся громкости, связано, конечно, с тем, что ухо как колебательная система обладает относительно малой добротностью; время установления колебаний этой системы мало по сравнению с периодом биений T_6 .

В действительности собственные колебания затухают. Результирующее колебание представляется суперпозицией незатухающей и затухающей синусоид. Когда собственные колебания затухнут, останется только колебание, представляемое незатухающей синусоидой, т. е. процесс установления колебаний закончится. В зависимости от величины коэффициента затухания γ характер установления колебаний может быть разным, как это видно из рис. 315.

Рассмотрим теперь случай, когда $\omega = \omega_0$ (резонанс). В этом случае выражение (132.1) принимает неопределенный вид $x = 0/0$. Неопределенность можно раскрыть, перейдя к пределу

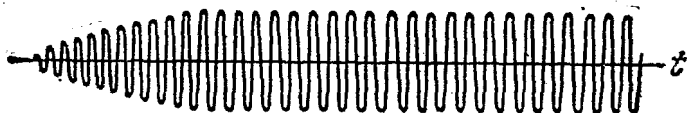
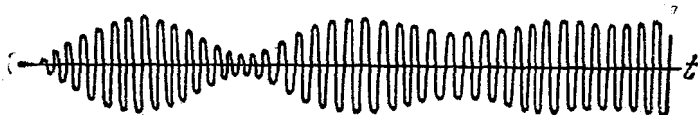


Рис. 315.

$\omega \rightarrow \omega_0$. Дифференцируя по ω , с помощью известного правила Лопиталья находим

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega^2 - \omega_0^2} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{-t \sin \omega t}{-2\omega} = \frac{t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Следовательно,

$$x = \frac{f_0 t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (132.5)$$

На это выражение можно смотреть как на колебание с частотой ω_0 , амплитуда которого $A(t) = f_0 t / (2\omega_0)$ линейно растет во времени. Если бы не было трения и других тормозящих сил, то процесс нарастания амплитуды колебаний никогда не закончился бы (рис. 316). В действительности тормозящие силы всегда есть. Пока колебания малы, они не играют большой роли. Но по мере нарастания амплитуды колебаний роль тормозящих сил становится все более и более существенной. Они в конце концов приостанавливают дальнейший рост амплитуды колебаний, и последние переходят в колебания постоянной амплитуды.

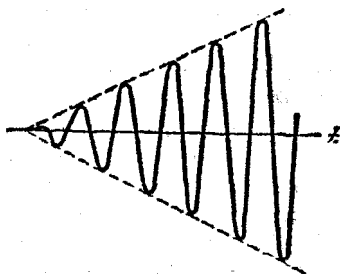


Рис. 316.

ЗАДАЧИ

1. При рассмотрении квазистационарных процессов в колебательном контуре пренебрегают магнитной энергией, локализованной в катушке самоиндукции. На примере следующей задачи (и задачи 2) убедиться в допустимости такого приближения. Обкладки плоского конденсатора имеют форму дисков радиуса R .

Толщина конденсатора d . Пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ . Конденсатор включен в цепь переменного тока $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить электрическую и магнитную энергии, локализованные в конденсаторе. Найти отношение максимальной магнитной к максимальной электрической энергии. Провести численный расчет для $R = 10$ см и частоты $\nu = 100$ Гц, $\epsilon = \mu = 1$.

Р е ш е н и е. Электрическая энергия (в гауссовой системе)

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{2d}{\epsilon \omega^2 R^2} \mathcal{I}_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Магнитное поле внутри конденсатора создается током смещения. На расстоянии r от оси конденсатора оно найдется из соотношения

$$H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \mathcal{I}_{\text{см}} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \mathcal{I}_0,$$

откуда

$$H = \frac{2r}{cR^2} \mathcal{I} = \frac{2r}{cR^2} \mathcal{I}_0 \cos \omega t.$$

Магнитная энергия, локализованная в конденсаторе:

$$W_m = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{\mu d}{4c^2} \mathcal{I}_0^2 \cos^2 \omega t.$$

Отношение максимальных энергий:

$$\frac{W_m^{\text{макс}}}{W_e^{\text{макс}}} = \frac{\epsilon \mu}{2} \left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 \approx 0,5 \cdot 10^{-14}.$$

2. Пространство внутри длинного соленоида, состоящего из N витков проволоки, заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ . Длина соленоида равна l , радиус R . По обмотке соленоида течет переменный ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить магнитную и электрическую энергии, локализованные внутри соленоида, и найти отношение максимальных значений этих энергий. Провести численный расчет для $R = 5$ см, $\epsilon = \mu = 1$ и частоты $\nu = 100$ Гц.

О т в е т.

$$W_m = \frac{2\pi^2 \mu R^2 N^2}{c^2 l} \mathcal{I}_0^2 \cos^2 \omega t,$$

$$W_e = \frac{\epsilon \mu^2 \pi^2 \omega^2 R^4 N^2}{4c^4 l} \mathcal{I}_0^2 \sin^2 \omega t,$$

$$\frac{W_e^{\text{макс}}}{W_m^{\text{макс}}} = \frac{\epsilon \mu}{2} \left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 \approx 1,3 \cdot 10^{-13}.$$

3. Прямой однослойный соленоид с индуктивностью L совершает вынужденные крутильные гармонические колебания вокруг своей оси: $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$. Соленоид гибкими проводами подсоединен к конденсатору емкости C (опыт Мандельштама и Папалекси). Найти напряжение на конденсаторе при резонансе, когда частота ω равна собственной частоте колебательного контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Радиус соленоида a , длина проволоки, из которой он изготовлен, l , сопротивление соленоида R (см. § 97).

О т в е т. $V = \frac{m}{e} \frac{lLa\omega^3}{R} \varphi_0 \sin \omega t$, где m — масса, e — заряд электрона.

4. В § 78 был описан опыт Эйнштейна и де Гааза, в котором для определения гиромангнитного отношения атомов было использовано явление резонанса. Предполагая, что магнитное поле, в котором совершаются крутильные колебания железного цилиндрика, очень сильное, так что цилиндрик почти всегда намагничен до насыщения, а при прохождении магнитного поля через нуль перемагничивание происходит практически мгновенно, определить амплитуду ϕ_0 установившихся крутильных колебаний цилиндрика при резонансе.

Решение. Уравнение вынужденных крутильных колебаний цилиндрика записывается в виде (78.2). Во время перемагничивания можно пренебречь всеми вращающимися моментами, действующими на цилиндрик, за исключением момента $-VI/\Theta\Gamma$. За это время цилиндрик не успеет повернуться на заметный угол, но его угловая скорость получит приращение

$$\Delta\dot{\phi}_0 = -\frac{V}{\Theta\Gamma} \int I dt = -2 \frac{V}{\Theta\Gamma} I_{\text{нас}}.$$

Получив такую начальную угловую скорость, цилиндрик начнет совершать свободные затухающие колебания

$$\phi = \frac{\Delta\dot{\phi}_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t.$$

Через половину периода амплитуда колебаний уменьшится в $e^{\gamma T/2}$ раз. Но в это время произойдет новое перемагничивание, в результате которого амплитуда угловой скорости получит новое приращение $\Delta\dot{\phi}_0$. Новая амплитуда отклонения станет равной $\frac{\Delta\dot{\phi}_0}{\omega} (1 + e^{-\gamma T/2})$ и т. д. Амплитуда установившихся колебаний представится геометрической прогрессией

$$\phi_0 = \frac{\Delta\dot{\phi}_0}{\omega} (1 + e^{-\gamma T/2} + e^{-2\gamma T/2} + \dots) = \frac{\Delta\dot{\phi}_0/\omega}{1 - e^{-\gamma T/2}}$$

или при малых значениях коэффициента затухания

$$\phi_0 = \frac{2\Delta\dot{\phi}_0}{\omega T \gamma} = \frac{\Delta\dot{\phi}_0}{\pi \gamma} = -2 \frac{V}{\pi \gamma \Theta \Gamma} I_{\text{нас}}.$$

5. Через баллистический гальванометр с баллистической постоянной B пропускается кратковременный импульс тока, в течение которого через него проходит количество электричества q . Спустя половину периода, когда рамка гальванометра вернется в исходное положение, через гальванометр пропускается такой же импульс тока, но в противоположном направлении; через следующую половину периода пропускается снова такой же импульс, но в первоначальном направлении и т. д. Таким образом, всякий раз, когда рамка гальванометра проходит через положение равновесия, она испытывает одинаковые толчки в направлении своего движения. Найти максимальный угол отклонения рамки при установившихся колебаниях. Период (затухающих) колебаний гальванометра T , логарифмический декремент d .

$$\text{Ответ. } \phi_{\text{макс}} = \frac{1}{1 - e^{-Td/2}} \frac{q}{B}.$$

6. Катушка колебательного контура с параметрами L , C , $R = 0$ помещена в постоянное магнитное поле, создающее в ней постоянный магнитный поток Φ_0 . В момент времени $t = 0$ магнитное поле выключается. Время выключения τ пренебрежимо мало по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти ток \mathcal{I} в контуре в зависимости от времени после выключения поля.

$$\text{Ответ. } \mathcal{I} = \frac{\Phi_0}{L} \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

7. Вблизи катушки колебательного контура с параметрами L_1 , C , $R = 0$ расположена вторая катушка с индуктивностью L_2 . Коэффициент взаимной индук-

ции между катушками равен L_{12} . Какой будет резонансная частота контура, если выводы второй катушки замкнуты накоротко? Считать, что индуктивное сопротивление второй катушки на рассматриваемой частоте значительно больше ее активного сопротивления. При каком условии резонанс недостижим?

Ответ. $\omega_{рез} = 1/\sqrt{(L_1 - L_{12}^2/L_2)C}$. Резонанс недостижим, если $L_{12}^2 = L_1 L_2$.

8. В колебательном контуре с индуктивностью L и емкостью C совершаются незатухающие колебания силы тока

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t, \quad \omega^2 = 1/(LC).$$

Катушкой самоиндукции служит прямая длинная проволочная спираль. Как изменится частота, амплитуда и энергия колебаний, если в момент времени $t = 0$ очень быстро (т. е. в течение времени, малого по сравнению с периодом колебаний $T = 2\pi/\omega$) растянуть спираль до удвоенной длины? Объясните, почему при этом меняется энергия колебаний.

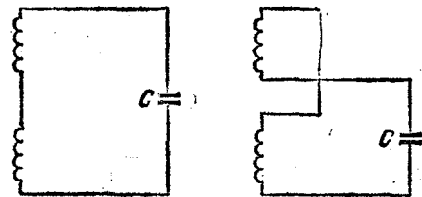


Рис. 317.

Ответ. Частота увеличится в $\sqrt{2}$ раз. Амплитуда колебаний и энергия возрастут вдвое.

9. Две одинаковые катушки, намотанные на общий каркас, включены последовательно в колебательный контур с емкостью C двумя способами, изображенными на рис. 317. Резонансные частоты колебательных контуров оказались равными ω_1 и ω_2 соответственно. Найти индуктивность L каждой из катушек и коэффициент их взаимной индукции L_{12} .

$$\text{Ответ. } L = \frac{1}{4C} \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right), \quad L_{12} = \frac{1}{4C} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right).$$

10. С помощью схемы, показанной на рис. 318, требуется получить фазовый сдвиг на угол 90° между напряжением на входе $V_{вх}$ и напряжением на выходе

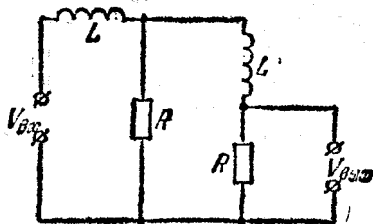


Рис. 318.

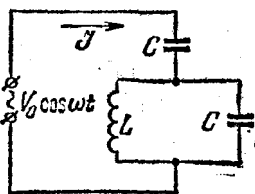


Рис. 319.

$V_{вых}$. Какому условию должны удовлетворять параметры схемы R и L , если круговая частота входного напряжения равна ω ? Чему при этом будет равно отношение амплитуд входного и выходного напряжений?

$$\text{Ответ. } \omega L = R, \quad |V_{вх}/V_{вых}| = 3.$$

11. Найти ток \mathcal{I} (в установившемся режиме) в цепи, изображенной на рис. 319. При какой частоте ω амплитуда установившихся колебаний будет максимальной и при какой минимальна? Чему равен максимум и минимум тока?

$$\text{Ответ. } \mathcal{I} = \frac{V_0 \omega C (1 - \omega^2 LC)}{2\omega^2 LC - 1} \sin \omega t, \quad \mathcal{I}_{мин} = 0 \text{ при } \omega^2 = 1/(LC), \\ \mathcal{I}_{макс} = \infty \text{ при } \omega^2 = 1/(2LC).$$

12. Генератор синусоидальной э. д. с. замкнут на активное сопротивление R и реактивное X , соединенные параллельно. Убрав R и X , тот же генератор замыкают на активное сопротивление r и реактивное x , соединенные последовательно. При каком условии амплитуда и фаза тока при этом останутся неизменными, если X и x — величины вещественные?

Ответ. $r = \frac{X^2}{R^2 + X^2} R$, $x = \frac{R^2}{R^2 + X^2} X$.

13. При каком условии амплитуда тока \mathcal{I} в цепи, изображенной на рис. 320, зависит только от амплитуды приложенного напряжения $V = V_0 \cos \omega t$, но не от частоты? Найти при этом условия разность фаз между приложенными напряжениями на концах RC-пары.

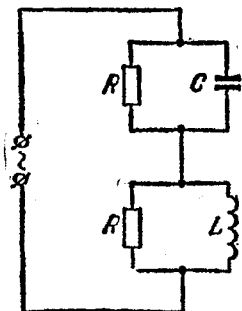


Рис. 320.

Ответ. $L = R^2 C$; $\text{tg } \varphi = -\omega RC$.

14. Найти комплексный импеданс Z бесконечной цепочки, изображенной на рис. 321.

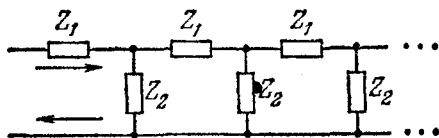


Рис. 321.

Решение. Пусть параметры цепочки таковы, что при наложении синусоидального напряжения в ней устанавливается синусоидальный ток. В этом случае можно пользоваться понятием импеданса. Если удалить первые два звена цепочки Z_1 и Z_2 , то останется такая же бесконечная цепочка. Ее можно заменить одним звеном с импедансом Z . Тогда получится схема, изображенная на рис. 322.

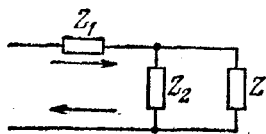


Рис. 322.

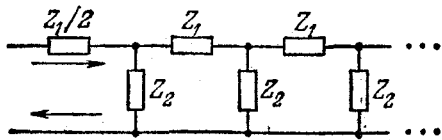


Рис. 323.

Импедансы Z и Z_2 соединены параллельно, их результирующий импеданс $Z Z_2 / (Z + Z_2)$ соединен последовательно с импедансом Z_1 . В результате должен получиться импеданс Z , т. е.

$$Z = Z_1 + \frac{Z Z_2}{Z + Z_2},$$

откуда

$$Z = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}.$$

Знак плюс перед квадратным корнем означает, что из двух значений корня следует брать то, которое имеет положительную вещественную часть. Действительно, квадратный корень есть не что иное, как импеданс Z' бесконечной цепочки, изображенной на рис. 323, а во всякой реальной системе активная часть комплексного сопротивления должна быть положительной.

15. Решить предыдущую задачу в предположении, что все импедансы, из которых составлена цепь, чисто мнимые (состоят из катушек самоиндукции и конденсаторов).

Решение. Полагая в предыдущей задаче $Z_1 = iX_1$, $Z_2 = iX_2$, получим

$$Z = \frac{1}{2} (iX_1 \pm \sqrt{-(4X_1X_2 + X_1^2)}) .$$

Если $4X_1X_2 + X_1^2 < 0$, т. е. подкоренное выражение положительно, то импеданс Z будет содержать вещественную часть, а потому цепь будет потреблять или отдавать энергию, в зависимости от знака этой вещественной части. Стационарное состояние в этом случае невозможно, а решение, полученное в предыдущей задаче, неприменимо. Для решения необходимо использовать начальные условия.

Синусоидальный ток в цепочке возможен только при выполнении условия $4X_1X_2 + X_1^2 \geq 0$. Только тогда можно пользоваться понятием импеданса и решением предыдущей задачи. Вопрос сводится к выбору знака перед квадратным корнем. Для этого предположим, что импеданс Z_1 содержит малое омическое сопротивление R_1 , и перейдем к пределу $R_1 \rightarrow 0$. Полагая $Z_1 = iX_1 + R_1$, $Z_2 = iX_2$, из решения предыдущей задачи получим

$$Z' = \frac{1}{2} \sqrt{-(4X_1X_2 + X_1^2) + 2iR_1(X_1 + 2X_2)} ,$$

где $Z' = Z - \frac{1}{2}Z_1$ — импеданс бесконечной цепочки, изображенной на рис. 323.

При извлечении квадратного корня пренебрежем квадратами R_1 . В этом приближении

$$Z' = \frac{i}{2} \left[\sqrt{4X_1X_2 + X_1^2} - i \frac{R_1(X_1 + 2X_2)}{\sqrt{4X_1X_2 + X_1^2}} \right] .$$

Знак надо выбрать так, чтобы вещественная часть этого выражения была положительна. Так как $R_1 > 0$, то в случае $X_1 + 2X_2 > 0$ надо взять знак плюс, а в случае $X_1 + 2X_2 < 0$ — минус. Полагая $R_1 = 0$, окончательно находим

$$Z = \begin{cases} \frac{i}{2} [X_1 + \sqrt{4X_1X_2 + X_1^2}] , & \text{если } X_1 + 2X_2 > 0 , \\ \frac{i}{2} [X_1 - \sqrt{4X_1X_2 + X_1^2}] , & \text{если } X_1 + 2X_2 < 0 . \end{cases}$$

Например, если цепочка составлена только из катушек самоиндукции, то $X_1 > 0$, $X_2 > 0$, и перед корнем надо взять знак плюс. В этом случае ток отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$. Если же цепочка состоит только из конденсаторов, то $X_1 < 0$, $X_2 < 0$, так что годится только знак минус. В этом случае фаза тока опережает фазу напряжения на $\pi/2$.

16. Найти импеданс бесконечной цепочки, изображенной на рис. 324.

О т в е т. $Z = Z_1 + \sqrt{Z_1^2 + Z_1Z_2}$.

17. На вход схемы, изображенной на рис. 325, подается синусоидальное напряжение частоты ω . Исследовать зависимость амплитуды и фазы выходного напряжения от величины сопротивления R .

О т в е т. Амплитуды на входе и выходе одинаковы. Сдвиг фазы выходного напряжения относительно входного определяется формулой

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\omega RL}{\omega^2 L^2 - R^2} .$$

18. По длинному прямому проводу течет синусоидальный ток \mathcal{I} высокой частоты $\nu = 10^8$ Гц. К проводу подносится квадратный проволочный контур со стороной $a = 17,2$ см, в который включена лампочка (рис. 326, а). Когда контур поднесен на расстояние $b = 10$ см, лампочка горит нормальным накалом. Определить эффективное значение силы тока в проводе $\mathcal{I}_{\text{эф}}$, если для нормального накала лампочки требуется постоянное напряжение $V = 6$ В. Уменьшится или увели-

чится напряжение на лампочке и во сколько раз, если квадрат заменить двойным квадратом, изображенным на рис. 326, б? Сопротивлением контуров пренебречь.

О т в е т. $\mathcal{E}_{\text{эфф}} = \frac{V}{4\pi va \ln(a/b+1)} = 0,028 \text{ СГСМ-ед.} = 0,28 \text{ А.}$ Напряжение на лампочке уменьшится в

$$\ln\left(\frac{a}{b} + 1\right) / \ln\frac{(a+b)^2}{b(b+2a)} \approx 2 \text{ раза.}$$

19. Цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивления R и большой индуктивности L , присоединена к источнику постоянного тока, поддерживающего на зажимах постоянное напряжение V_0 . Для ограничения перенапряжений во время отключения источника параллельно с цепью включен конденсатор емкости C (рис. 327). Определить напряжение

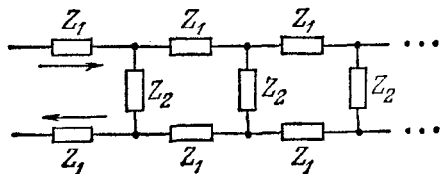


Рис. 324.

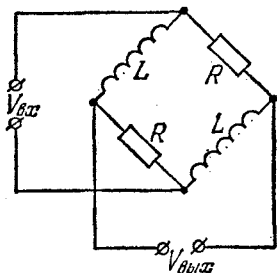


Рис. 325.

на конденсаторе $V(t)$ после отключения источника постоянного напряжения. Параметры контура удовлетворяют условию $4L > CR^2$.

О т в е т. $V(t) = V_0 e^{-\gamma t} \left[\cos \omega t + \left(\frac{1}{\omega RC} + \frac{\gamma}{\omega} \right) \sin \omega t \right]$, где $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$, $\gamma = R/(2L)$.

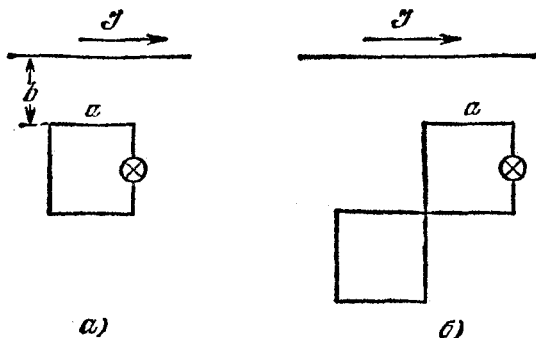


Рис. 326.

20. К контуру L, C, R (рис. 328) с малым затуханием в момент $t = 0$ подключают источник постоянной э. д. с. с ничтожно малым внутренним сопротивлением. Определить напряжение V на конденсаторе C в зависимости от времени t . На какое минимальное напряжение должен быть рассчитан конденсатор?

О т в е т. $V = \mathcal{E} \left[1 - e^{-\gamma t} \left(\cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t \right) \right]$. Минимальное напряжение, на которое должен быть рассчитан конденсатор, не меньше $2\mathcal{E}$.

21. Катушка с индуктивностью L , конденсатор с емкостью C и батарея с электродвижущей силой \mathcal{E} и внутренним сопротивлением R соединены параллельно (рис. 329). Найти силу тока $\mathcal{I}(t)$ в катушке после включения батареи. Параметры L, C, R удовлетворяют условию $L < 4CR^2$.

Отв. $\mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - e^{-\gamma} \left(\cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t \right) \right]$.

22. К синусоидальному напряжению $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \delta)$ в момент времени $t = 0$ подключаются последовательно соединенные сопротивление R и индуктивность L . Найти силу тока \mathcal{I} в цепи в зависимости от времени. При каком условии после замыкания цепи в ней сразу установятся синусоидальные колебания?

Отв.

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}_0}{R^2 + \omega^2 L^2} [R \cos(\omega t + \delta) + \omega L \sin(\omega t + \delta) - e^{-Rt/L} (R \cos \delta + \omega L \sin \delta)].$$

При условии $\operatorname{tg} \delta = -R/(\omega L)$.

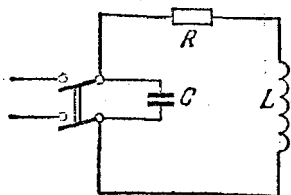


Рис. 327.

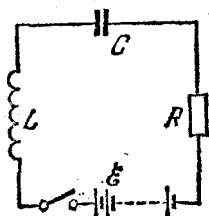


Рис. 328.

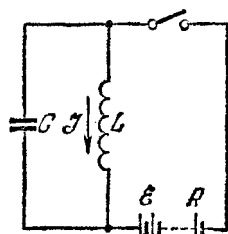


Рис. 329.

23. В цепь переменного тока с напряжением $\mathcal{E} = 440$ В и частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и конденсатор. Чему равна емкость конденсатора C , если лампочка рассчитана на напряжение 220 В и силу тока 1 А? Чему равен сдвиг фаз между током и полным напряжением в цепи?

Отв. $C = \frac{1}{2\sqrt{3} \nu R} = 8,4$ мкФ. Ток опережает напряжение по фазе на 60° .

24. В цепь переменного тока с напряжением $\mathcal{E}_{\text{эф}} = 440$ В и частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и катушка самоиндукции. Лампочка рассчитана на 110 В и 1 А. При замене лампочки другой, рассчитанной на 220 В и 0,8 А, оказалось, что новая лампочка горит также нормально с накалом. Найти сопротивление R и самоиндукцию L катушки.

Отв. $R = \frac{3}{2} \frac{R_2^2 - 5R_1^2}{R_2 - R_1} = 137$ Ом, $L = \frac{1}{2\nu} \sqrt{16R_1^2 - (R_1 + R_2)^2} = 1,16$ Г, где $R_1 = 110$ Ом и $R_2 = 275$ Ом — сопротивления первой и второй лампочек соответственно.

25. Два одинаковых проволочных кольца радиуса r каждое расположены так, как указано на рис. 330. Расстояние l между центрами колец велико по сравнению с r . В кольце 1 поддерживается переменный ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos \omega t$. Найти величину и направление средней силы F взаимодействия между кольцами. Индуктивность одного кольца равна L , омическое сопротивление R . Исследовать два предельных случая: 1) $\omega L \gg R$; 2) $\omega L \ll R$.

Ответ. $F = \frac{6\pi^4 \omega^2 L r^3 \mathcal{J}_0^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \frac{1}{l}$. Сила F — отталкивательная. Если $\omega L \gg R$, то

$$F = \frac{6\pi^4 r^3 \mathcal{J}_0^2}{L} \frac{1}{l}.$$

В другом предельном случае $\omega L \ll R$

$$F = \frac{6\pi^4 \omega^2 L r^3 \mathcal{J}_0^2}{R^2} \frac{1}{l}.$$

• 26. Металлическое проволочное кольцо площади S с омическим сопротивлением R и индуктивностью L подвешено в горизонтальном однородном магнитном поле $H = H_0 \cos \omega t$ и удерживается в нем таким образом, что угол между вектором H_0 и нормалью n к плоскости кольца равен φ (рис. 331). Определить средний момент сил \bar{M} , действующий на кольцо со стороны магнитного поля. Найти положения равновесия кольца и исследовать их устойчивость. Рассмотреть два предельных случая: 1) $\omega L \gg R$; 2) $\omega L \ll R$. В каком случае при одинаковых L вращающий момент меньше?

Ответ. $\bar{M} = \frac{\omega^2 S^2 L H_0 \cos \varphi}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} (H_0 n)$.

Возможны два положения равновесия:

- а) плоскость кольца перпендикулярна к магнитному полю (неустойчивое равновесие);
 б) плоскость кольца параллельна магнитному полю (устойчивое равновесие).
 При $\omega L \gg R$

$$\bar{M} \equiv \bar{M}_1 = \frac{H_0^2 S^2}{2L} \sin \varphi \cos \varphi.$$

При $\omega L \ll R$

$$\bar{M} \equiv \bar{M}_2 = \frac{\omega^2 H_0^2 S^2 L}{2R^2} \sin \varphi \cos \varphi = \bar{M}_1 \left(\frac{\omega L}{R} \right)^2.$$

Во втором случае вращающий момент меньше.

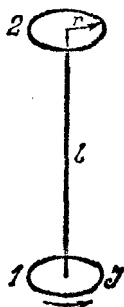


Рис. 330.

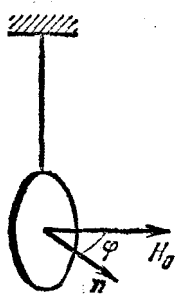


Рис. 331.

§ 133. Автоколебания. Ламповый генератор

1. Автоколебаниями называются вынужденные незатухающие колебания в реальных системах, период и амплитуда которых не зависят от характера внешнего воздействия, а определяются свойствами самой автоколебательной системы. Автоколебания поддерживаются за счет поступления энергии из внешнего источника, причем количество поступающей энергии регулируется самой системой. В отличие от незатухающих собственных колебаний гармонического осциллятора и аналогичных систем, амплитуды которых определяются начальными условиями, амплитуды автоколебаний от начальных условий не зависят. Собственные незатухающие колебания относятся к идеализированному типу колебаний, который в реальных системах никогда не реализуется точно, — реальные собственные колебания всегда затухают. Напротив, автоколебания