в цепь, помимо неоновой лампы, *второй нелинейный элемент* — электронную лампу (триод или лучше пентод), как указано на рис. 339, *а*. Через лампу потечет анодный ток $\mathscr{I}_a = \dot{q}$, практически не зависящий от анодного напряжения. Поэтому во время зарядки заряд на конденсаторе будет меняться во времени по линейному закону: $q = \mathscr{I}_a t + \mathrm{const}$. По линейному закону будет меняться и напряжение на конденсаторе C (равное напряжению на неоновой лампе). Поэтому вместо кривой рис. 338, *в* получится такая же кривая, но с прямыми зубцами (рис. 339, *б*).

§ 135. Параметрическое возбуждение колебаний

1. Допустим, что с помощью надлежащего приспособления (например, электрического мотора) индуктивность L или емкость C колебательного контура (или то и другое) периодически меняются во времени. Свободные колебания такой системы описываются уравнением

$$\frac{d\Phi}{dt} + R\mathscr{I} + \frac{q}{C} = 0, \tag{135.1}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{dq}{dt}\right) + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \tag{135.2}$$

(см. § 122). При постоянном R это — *линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами*, переходящее в нелинейное, когда сопротивление R зависит от тока $\mathscr{I}$. Аналогичным уравнением описывается и движение механической системы — *качелей*. Качающийся на качелях, приседая и распрямляясь, периодически поднимает и опускает центр масс своего тела и тем самым меняет параметры системы. При определенных условиях все рассмотренные системы становятся *неустойчивыми* — случайно возникшее отклонение от состояния равновесия приводит в них к возникновению и нарастанию колебаний. Это явление, поскольку оно вызывается изменениями параметров системы, называется *параметрическим возбуждением колебаний*, а сами колебания — *параметрическими*.

Нахождение условий возбуждения параметрических колебаний сводится к исследованию решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Решение таких уравнений представляет, вообще говоря, очень трудную математическую задачу. Найти решение в конечной аналитической форме обычно не удается. К тому же линейные уравнения позволяют получить *только условие возбуждения колебаний*, но не позволяют решить вопрос об *установлении их стационарной амплитуды*, так как при достаточно больших амплитудах дифференциальные уравнения, описывающие колебания, становятся *существенно нелинейными*. Мы рассмотрим только возбуждение параметрических колебаний и ограничимся при этом простейшим случаем, когда параметры системы изменяются *скачкообразно*, а в промежутках между этими скачками остаются постоянными. Можно, например, через равные промежутки времени очень быстро раздвигать и сближать пластины плоского конденсатора или растягивать и сжимать спираль, служащую «катушкой самоиндукции» колебательного контура, меняя тем самым скачкообразно величины C и L. «Очень быстро» или «скачкообразно» означает, что за время изменения параметров Δt заряд конденсатора q практически не успевает измениться. Отсюда следует, что за то же время Δt практически не изменится и магнитный поток Φ через катушку самоиндукции. В самом деле, проинтегрировав почленно уравнение (135.1) по промежутку времени Δt, получим

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{d\Phi}{dt}\,dt + \int_t^{t+\Delta t} R\mathscr{I}\,dt + \int_t^{t+\Delta t} \frac{q}{C}\,dt = 0,$$

или при постоянном сопротивлении R

$$\Delta\Phi + R\,\Delta q + \int \frac{q}{C}\,dt = 0.$$

Так как по предположению изменение заряда Δq за время Δt пренебрежимо мало, а заряд q во время изменения остается конечным, то при $\Delta t \to 0$ из последнего соотношения следует $\Delta\Phi = \text{const}$. Результат остается верным и в том случае, когда R зависит от силы тока.

2. После этих замечаний возьмем колебательный контур и будем через определенные промежутки времени скачкообразно изменять его индуктивность L, оставляя емкость C неизменной. Таким образом, индуктивность будет принимать два значения, большее из которых обозначим через L_1, а меньшее через L_2. Соответствующие значения собственной частоты колебательного контура обозначим через $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1C}$, $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2C}$, а периоды собственных колебаний — через T_1 и T_2. Для простоты будем считать, что омическое сопротивление контура равно нулю. В контуре всегда текут токи, вызванные случайными внешними наводками или тепловыми флуктуациями. Пусть сначала $L = L_1$. В момент, когда ток в катушке максимален и равен $\mathscr{I}_{10}$, а заряд конденсатора обращается в нуль, скачкообразно уменьшим индуктивность от L_1 до L_2. Так как магнитный поток при этом останется неизменным, то ток возрастет до $\mathscr{I}_{20} = \frac{L_1}{L_2}\mathscr{I}_{10}$. С этого момента начнутся свободные колебания тока $\mathscr{I} = \mathscr{I}_{20}\cos\omega_2 t$. Через время $t = T_2/4$, когда $\mathscr{I}$ обратится в нуль, увеличим L до прежнего значения L_1. Так как во время изменения индуктивности ток через катушку не течет, то амплитуда колебаний не изменится, а изменится только их частота. Колебания тока будут описываться уравнением

$\mathscr{I} = \mathscr{I}_{20} \sin \omega_1 t$. (Условимся время t отсчитывать всякий раз от момента последнего скачкообразного изменения индуктивности.) В момент $t = T_1/4$, когда ток достигнет максимального значения $\mathscr{I}_{10}$, снова уменьшим индуктивность от L_1 до L_2. В результате амплитуда колебаний сделается равной $\mathscr{I}_{30} = (L_1/L_2)\, \mathscr{I}_{20} = (L_1/L_2)^2 \mathscr{I}_{10}$. И так будем поступать дальше, уменьшая L всякий раз, когда ток максимален, и увеличивая, когда он проходит через нуль. В результате амплитуда колебаний тока будет неограниченно возрастать в геометрической прогрессии

$$A_0 = A_{10}\left[1 + \frac{L_1}{L_2} + \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 + \ldots\right],$$

несмотря на то, что в системе отсутствуют какие бы то ни было источники тока или напряжения. Такая раскачка колебаний называется *параметрическим резонансом.* Мы видим, что параметрический резонанс возникает, когда параметры системы меняются с частотой, *вдвое большей* собственной частоты этой системы. Но легко видеть, что параметрический резонанс можно получить также, если частоту изменения параметров уменьшить в 2, 3, ... раз. Однако в этом случае он будет выражен слабее.

Совершенно аналогичное явление получится и в том случае, когда с теми же периодами скачкообразно изменять *емкость конденсатора.* При таких изменениях остается постоянным *заряд конденсатора* q, а меняется напряжение на его обкладках $V = q/C$. В момент прохождения заряда через максимум надо уменьшить емкость C, повысив тем самым напряжение V. В момент же, когда q обращается в нуль, надо возвратить емкость C к ее исходному значению. В результате снова возникнет усиление колебаний напряжения V с амплитудой, возрастающей в геометрической прогрессии.

3. Все это легко понять и *с энергетической точки зрения.* Энергия конденсатора $W_e = q^2/(2C)$, а катушки самоиндукции $W_m = \Phi^2/(2L)$. Для возбуждения параметрических колебаний надо уменьшить C, когда заряд конденсатора максимален, и уменьшить L, когда в контуре максимален ток. При таких изменениях электрическая и магнитная энергии увеличиваются соответственно на $\Delta W_e = q^2 \Delta\left(\frac{1}{2C}\right)$ и $\Delta W_m = \Phi^2 \Delta\left(\frac{1}{2L}\right)$. Возвращать же C и L к их исходным значениям надо в те моменты, когда обращаются в нуль q и L, так как в этом случае электрическая и магнитная энергии остаются неизменными. Таким образом, в колебательную систему будет периодически вкладываться энергия, что и приводит к раскачке колебаний. Увеличение электрической энергии конденсатора при уменьшении его емкости легко понять на примере плоского конденсатора. Между пластинами конденсатора действуют силы кулоновского притяжения. При раздвижении пластин емкость конденсатора

уменьшается и одновременно совершается работа против этих сил. Она-то и идет на увеличение энергии конденсатора. Аналогичное явление имеет место и в случае проволочной спирали, по которой течет ток. Растягивая спираль, мы уменьшаем ее индуктивность L и одновременно совершаем работу против амперовых сил притяжения между ее витками. В результате совершается положительная внешняя работа, и магнитная энергия тока увеличивается.

Аналогичные рассуждения применимы и к раскачке качелей. Для пояснения возьмем математический маятник, колеблющийся на нити, верхний конец которой пропущен через малое отверстие. Будем втягивать нить, когда маятник проходит через нижнее положение, и настолько же выпускать ее, когда он проходит через крайние положения. В первом случае мы совершаем над маятником положительную работу, сообщая маятнику энергию, а во втором — отрицательную работу, отбирая от него энергию обратно. Однако положительная работа по абсолютной величине превосходит отрицательную. Действительно, натяжение нити максимально, когда колеблющийся маятник проходит через среднее положение, так как это натяжение должно не только уравновесить вес маятника, но и сообщить ему ускорение. Напротив, в крайних положениях натяжение нити минимально, так как здесь оно должно уравновесить только составляющую силы веса вдоль направления нити. Поэтому при равных перемещениях вдоль нити сила натяжения в среднем положении совершит бо́льшую работу, чем в крайнем положении. В результате в среднем положении маятник будет получать больше энергии, чем возвращать в крайнем. Поэтому произойдет параметрическая раскачка колебаний. Человек, качающийся на качелях, подобен маятнику: он приседает в крайних положениях и выпрямляется в среднем.

4. Наличие омического сопротивления, пока оно остается постоянным, не вносит никаких затруднений. Надо только учесть, что теперь свободные колебания системы между моментами изменения ее параметров происходят с затуханием. Если выполнено условие, что потери энергии, связанные с этим затуханием, меньше энергии, вкладываемой в систему за тот же промежуток времени, то опять будет происходить раскачка колебаний с амплитудой, возрастающей в геометрической прогрессии. Таким образом, если бы система все время подчинялась линейному дифференциальному уравнению, то при соблюдении указанного условия амплитуда колебаний непрерывно возрастала бы до тех пор, пока не произошел бы «пробой» конденсатора или изоляции подводящих проводов. *Возникновение параметрических колебаний с установившейся амплитудой теория, основанная на линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами, объяснить не может.* Для получения колебаний со стационарной амплитудой в систему приходится вводить проводники с *нелинейной характеристикой*, например катушку с железным сердечником, лампы накаливания и пр. Но тогда дифференциальные уравнения, описывающие систему, становятся *нелинейными*. Из этих уравнений можно получить не только условие возникновения стационарных установившихся колебаний, но и найти их амплитуду.

5. Все изложенное подтверждается опытом. На рис. 340 изображена *емкостная параметрическая машина Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси*. Конденсатор машины состоял из двух систем обкладок — неподвижной (статор) и подвижной (ротор). Статор был изготовлен из 26 квадратных алюминиевых

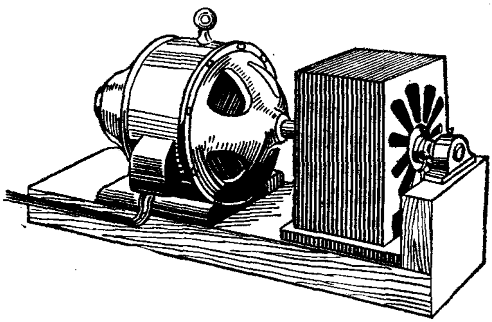

Рис. 340.

пластин с симметрично расположенными радиальными вырезами, а ротор — из 25 таких же пластин круглой формы с аналогичными вырезами. С помощью мотора ротор можно было приводить во вращение со скоростью до 4000 оборотов в минуту. При этом периодически менялась емкость конденсатора и возбуждались параметрические колебания тока. Для того чтобы сделать систему нелинейной, параллельно конденсатору включалась цепочка из 6 неоновых ламп. При наличии последних на конденсаторе получалось устойчивое напряжение, достигавшее 600—700 В. В отсутствие неоновых ламп напряжение не устанавливалось, а продолжало нарастать до 2000—3000 В, пока не проскакивали искры между обкладками конденсатора. Аналогичные опыты можно произвести и с «индукционной машиной», в которой периодически меняется индуктивность контура.

§ 136. Трансформатор

1. Трансформатор состоит из двух обмоток — *первичной* и *вторичной*, навитых на общий железный сердечник (рис. 341). Уравнения колебаний в такой системе записываются в виде

$$R_1\mathcal{I}_1 = \mathcal{E} - \dot{\Phi}_1, \qquad R_2\mathcal{I}_2 = -\dot{\Phi}_2, \tag{136.1}$$

где индексом 1 обозначены величины, относящиеся к первичной, а индексом 2 — к вторичной обмоткам. Для простоты пренебрежем рассеянием магнитного потока, проходящего через железный сердечник трансформатора. В этом предположении

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{136.2}$$

где n_1 и n_2 — числа витков в первичной и вторичной обмотках. Записав это соотношение в виде $n_1\Phi_2 = n_2\Phi_1$ и продифференцировав по времени, убеждаемся,