

например катушку с железным сердечником, лампы накаливания и пр. Но тогда дифференциальные уравнения, описывающие систему, становятся *нелинейными*. Из этих уравнений можно получить не только условие возникновения стационарных установившихся колебаний, но и найти их амплитуду.

5. Все изложенное подтверждается опытом. На рис. 340 изображена *емкостная параметрическая машина Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси*. Конденсатор машины состоял из двух систем обкладок — неподвижной (статор) и подвижной (ротор). Статор был изготовлен из 26 квадратных алюминиевых

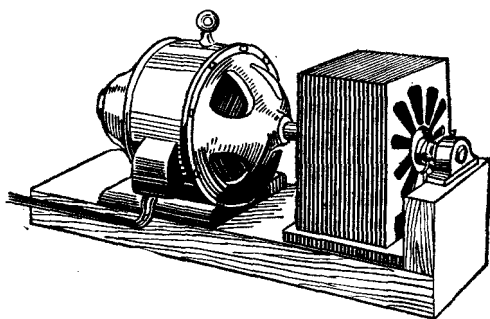


Рис. 340.

пластин с симметрично расположенными радиальными вырезами, а ротор — из 25 таких же пластин круглой формы с аналогичными вырезами. С помощью мотора ротор можно было приводить во вращение со скоростью до 4000 оборотов в минуту. При этом периодически менялась емкость конденсатора и возбуждались параметрические колебания тока. Для того чтобы сделать систему нелинейной, параллельно конденсатору включалась цепочка из 6 неоновых ламп. При наличии последних на конденсаторе получалось устойчивое напряжение, достигавшее 600—700 В. В отсутствие неоновых ламп напряжение не устанавливалось, а продолжало нарастать до 2000—3000 В, пока не проскакивали искры между обкладками конденсатора. Аналогичные опыты можно произвести и с «индукционной машиной», в которой периодически меняется индуктивность контура.

§ 136. Трансформатор

1. Трансформатор состоит из двух обмоток — *первичной* и *вторичной*, навитых на общий железный сердечник (рис. 341). Уравнения колебаний в такой системе записываются в виде

$$R_1 \mathcal{I}_1 = \mathcal{E} - \dot{\Phi}_1, \quad R_2 \mathcal{I}_2 = -\dot{\Phi}_2, \quad (136.1)$$

где индексом 1 обозначены величины, относящиеся к первичной, а индексом 2 — к вторичной обмоткам. Для простоты пренебрежем рассеянием магнитного потока, проходящего через железный сердечник трансформатора. В этом предположении

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (136.2)$$

где n_1 и n_2 — числа витков в первичной и вторичной обмотках. Записав это соотношение в виде $n_1 \Phi_2 = n_2 \Phi_1$ и продифференцировав по времени, убеждаемся,

что для производных магнитного потока справедливо такое же соотношение:

$$\frac{\dot{\Phi}_1}{\dot{\Phi}_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Оно позволяет исключить из уравнений (136.1) магнитные потоки. Таким путем получаем

$$R_1 \mathcal{I}_1 - \frac{n_1}{n_2} R_2 \mathcal{I}_2 = \mathcal{E}. \quad (136.3)$$

Отсюда видно, что наличие вторичной обмотки меняет ток в первичной цепи. Однако уравнения (136.3) недостаточны для определения двух неизвестных \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 . Для получения недостающего уравнения введем упрощающее предположение, что трансформатор *идеальный*, т. е. не обладает ферромагнетизмом. (В реальных трансформаторах, конечно, это не так.) Тогда связь между магнитными потоками и токами будет линейной:

$$\Phi_1 = L_1 \mathcal{I}_1 + L_{12} \mathcal{I}_2,$$

$$\Phi_2 = L_{21} \mathcal{I}_1 + L_2 \mathcal{I}_2,$$

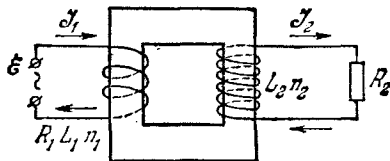


Рис. 341.

где L_1 — индуктивность первичной обмотки, L_2 — вторичной, а $L_{12} = L_{21}$ — коэффициент взаимной индукции этих обмоток. Ввиду (136.2) при любых токах \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 соблюдается соотношение

$$n_2 (L_1 \mathcal{I}_1 + L_{12} \mathcal{I}_2) = n_1 (L_{21} \mathcal{I}_1 + L_2 \mathcal{I}_2).$$

Приравнявая коэффициенты при \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 , из него находим

$$n_1 L_{21} = n_2 L_1, \quad n_2 L_{12} = n_1 L_2, \quad (136.4)$$

а потому

$$L_{12} L_{21} = L_1 L_2. \quad (136.5)$$

Если воспользоваться еще теоремой взаимности ($L_{12} = L_{21}$), то получится

$$L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}. \quad (136.6)$$

Теперь система уравнений (136.1) принимает вид

$$R_1 \mathcal{I}_1 = \mathcal{E} - L_1 \dot{\mathcal{I}}_1 - \sqrt{L_1 L_2} \dot{\mathcal{I}}_2, \quad (136.7)$$

$$R_2 \mathcal{I}_2 = -\sqrt{L_1 L_2} \dot{\mathcal{I}}_1 - L_2 \dot{\mathcal{I}}_2.$$

Предположим, далее, что электродвижущая сила \mathcal{E} меняется во времени синусоидально: $\mathcal{E} \sim e^{i\omega t}$. Тогда для установившихся колебаний получится

$$(R_1 + i\omega L_1) \mathcal{I}_1 + i\omega \sqrt{L_1 L_2} \mathcal{I}_2 = \mathcal{E}, \quad (136.8)$$

$$i\omega \sqrt{L_1 L_2} \mathcal{I}_1 + (R_2 + i\omega L_2) \mathcal{I}_2 = 0.$$

Отсюда

$$\mathcal{I}_1 = \frac{R_2 + i\omega L_2}{R_1 R_2 + i\omega (L_1 R_2 + L_2 R_1)} \mathcal{E}, \quad (136.9)$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{-i\omega \sqrt{L_1 L_2}}{R_1 R_2 + i\omega (L_1 R_2 + L_2 R_1)} \mathcal{E}.$$

Эти формулы и решают задачу о трансформаторе. В практически важном случае омическое сопротивление первичной цепи R_1 мало по сравнению

с индуктивным ωL_1 . Пренебрегая им, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \frac{R_2 + i\omega L_2}{i\omega L_1 R_2} \mathcal{E}, \\ \mathcal{I}_2 &= -\sqrt{\frac{L_2}{L_1 R_2}} \frac{\mathcal{E}}{R_2} = -\frac{n_2}{n_1} \frac{\mathcal{E}}{R_2}. \end{aligned} \quad (136.10)$$

При выводе последнего соотношения было учтено, что индуктивность обмотки пропорциональна квадрату числа витков. Формула делает понятной основную идею трансформатора. Если бы сопротивление R_2 было непосредственно присоединено к источнику электродвижущей силы \mathcal{E} , то получился бы ток \mathcal{E}/R_2 . Трансформатор увеличивает этот ток в n_2/n_1 раз или уменьшает в n_1/n_2 раз. Этот факт обычно выражают несколько иначе. Величина $V_2 = R_2 \mathcal{I}_2$ дает падение напряжения на сопротивлении R_2 . Ее называют напряжением во вторичной цепи. Из второй формулы (136.10) получаем

$$V_2 = -\frac{n_2}{n_1} \mathcal{E}. \quad (136.11)$$

Трансформатор повышает напряжение в n_2/n_1 раз или понижает в n_1/n_2 раз. С этим и связано соответствующее увеличение (или уменьшение) тока в сопротивлении R_2 .

2. Что касается тока \mathcal{I}_1 , то при его рассмотрении удобнее обратиться к векторной диаграмме. Ограничимся случаем $R_1 = 0$. Тогда первое уравнение (136.8) запишется в виде

$$L_1 \mathcal{I}_1 + \sqrt{L_1 L_2} \mathcal{I}_2 = \frac{\mathcal{E}}{i\omega}.$$

Если $R_2 = \infty$, то $\mathcal{I}_2 = 0$. В этом случае ток в первичной цепи называется *током холостого хода трансформатора*. Обозначим его через \mathcal{I}_0 . В нашем случае ($R_1 = 0$) $\mathcal{I}_0 = \mathcal{E}/(i\omega L_1)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} L_1 \mathcal{I}_1 + \sqrt{L_1 L_2} \mathcal{I}_2 &= L_1 \mathcal{I}_0, \text{ или} \\ n_1 \mathcal{I}_1 + n_2 \mathcal{I}_2 &= n_1 \mathcal{I}_0. \end{aligned} \quad (136.12)$$

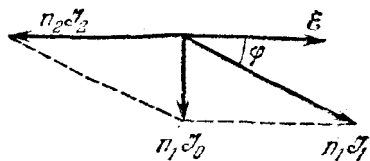


Рис. 342.

Ток холостого хода $\mathcal{I}_0 = -i\mathcal{E}/(\omega L_1)$ отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$. Если на векторной диаграмме напряжение изобразить горизонтальным отрезком, направленным вправо, то ток холостого хода \mathcal{I}_0 изобразится отрезком, направленным вниз (рис. 342). Ток \mathcal{I}_2 , как видно из (136.10), изобразится горизонтальным отрезком, направленным влево. Вместо самого тока удобнее откладывать ток, умноженный на соответствующее число витков (так называемые *ампер-витки*). Согласно (136.12) величина $n_1 \mathcal{I}_1$ изобразится вектором, равным геометрической разности векторов $n_1 \mathcal{I}_0$ и $n_2 \mathcal{I}_2$. При увеличении нагрузки (т. е. уменьшении сопротивления R_2) ток \mathcal{I}_2 , как показывают формулы (136.10), растет. Вместе с ним растет и ток \mathcal{I}_1 . А так как ток холостого хода остается неизменным, то из рис. 342 следует, что должен уменьшаться сдвиг фаз φ между током \mathcal{I}_1 и напряжением \mathcal{E} . Оба эти обстоятельства ведут к увеличению потребляемой мощности.

3. Вычислим среднюю мощность электрической энергии P_0 в первичной цепи. Считая для общности сопротивление R_1 каким угодно, запишем ток \mathcal{I}_1 в виде

$$\mathcal{I}_1 = \frac{a + ib}{c + id} \mathcal{E}.$$

Значения постоянных a, b, c, d легко установить, сравнивая это выражение с

первой формулой (136.9). Умножая числитель и знаменатель на $c - id$, получим

$$\mathcal{I}_1 = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \mathcal{E}.$$

Отсюда для косинуса сдвига фаз между током \mathcal{I}_1 и напряжением \mathcal{E} получим

$$\cos \varphi = \frac{ac + bd}{|(ac + bd) + i(bc - ad)|},$$

а для средней мощности

$$P_0 = \frac{1}{2} |\mathcal{E} \mathcal{I}_1| \cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} |\mathcal{E}|^2.$$

Подставим сюда значения коэффициентов a, b, c, d . Кроме того, введем отношение индуктивного сопротивления цепи к соответствующему омическому сопротивлению:

$$\alpha_k = \frac{\omega L_k}{R_k}. \quad (136.13)$$

В результате найдем

$$P_0 = \frac{1}{2} \frac{1 + \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}{1 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2} \frac{|\mathcal{E}|^2}{R_1}, \quad (136.14)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (136.15)$$

Ток отстает по фазе от напряжения на угол $|\varphi|$.

Средняя мощность, потребляемая в первичной цепи, будет $P_1 = \frac{1}{2} R_1 |\mathcal{I}_1|^2$, а во вторичной $P_2 = \frac{1}{2} R_2 |\mathcal{I}_2|^2$. Вычисляя их, получим

$$P_1 = \frac{1 + \alpha_2^2}{1 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2} \frac{|\mathcal{E}|^2}{R_1}, \quad P_2 = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2} \frac{|\mathcal{E}|^2}{R_1}. \quad (136.16)$$

Таким образом, $P_0 = P_1 + P_2$, как это и должно быть. При неизменных параметрах первичной цепи ($\mathcal{E}, R_1, \alpha_1$) мощность P_2 , потребляемая во вторичной цепи, максимальна, когда $\alpha_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + 1}$, или приближенно, когда $\alpha_2 = \alpha_1$, так как в практически важных случаях всегда $\alpha_1 \gg 1$. Максимальное значение P_2 дается приближенным выражением

$$P_{2 \text{ макс}} \approx \frac{1}{8} \frac{|\mathcal{E}|^2}{R_1}. \quad (136.17)$$

Мощность тока в первичной цепи при этом будет $P_0 = \frac{1}{4} \frac{|\mathcal{E}|^2}{R_1}$, т. е. вдвое больше.

Таким образом, к. п. д. трансформатора составляет всего 50%. В общем случае к. п. д. дается выражением

$$\eta = \frac{P_2}{P_0} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 + \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (136.18)$$

При заданном α_1 к. п. д. максимален, когда $\alpha_2 = 1$, т. е. когда омическое сопротивление вторичной цепи равно ее индуктивному сопротивлению. Максимальное значение к. п. д. будет $\eta_{\text{макс}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2}$. Если $\alpha_1 \gg 1$, то $\eta_{\text{макс}} \approx 1$. При этом для мощности, потребляемой во вторичной цепи, получаем

$$P_2 \approx \frac{1}{2} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\alpha_1 R_1} = \frac{1}{2} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\omega L_1} \approx P_0. \quad (136.19)$$

Мощность холостого хода трансформатора $P_0^{(0)}$ найдется из формулы (136.14), если в ней положить $\alpha_2 = 0$. Это дает

$$P_0^{(0)} = \frac{1}{2(\alpha_1^2 + 1)} \frac{|\mathcal{E}|^2}{R_1} \approx \frac{|\mathcal{E}|^2}{2\alpha_1^2 R_1}, \quad (136.20)$$

$$\frac{P_0}{P_0^{(0)}} = \frac{1 + \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}{1 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2} (1 + \alpha_1^2) \approx \alpha_1 \alpha_2. \quad (136.21)$$

Приближенные выражения, как всегда, получены в предположении $\alpha_1 \gg 1$. Кроме того, последнее выражение предполагает также, что $\alpha_1 \gg \alpha_2$ (чтобы к. п. д. был большим). При максимальной мощности P_2 $\alpha_1 = \alpha_2$ и из (136.21) получаем

$$\frac{P_0}{P_0^{(0)}} \approx \frac{\alpha_1^2}{2}. \quad (136.22)$$

Таким образом, при нагрузке трансформатора до максимальной мощности мощность тока в первичной цепи возрастает в $\alpha_1^2/2$ раз по сравнению с мощностью холостого хода, а при нагрузке с максимальным к. п. д. ($\alpha_2 = 1$) — в α_1 раз.

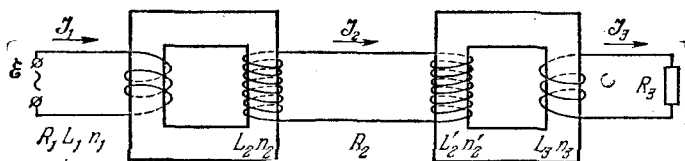


Рис. 343.

4. Трансформатор применяется не только для повышения или понижения напряжения переменного тока, но и для *передачи электрической энергии на расстоянии*. Для исследования этого вопроса рассмотрим два связанных трансформатора, параметры которых обозначены на рис. 343. Запишем уравнения колебаний в них:

$$\begin{aligned} R_1 \mathcal{I}_1 &= \mathcal{E} - L_1 \dot{\mathcal{I}}_1 - \sqrt{L_1 L_2} \dot{\mathcal{I}}_2, \\ R_2 \mathcal{I}_2 &= -\sqrt{L_1 L_2} \dot{\mathcal{I}}_1 - L_2 \dot{\mathcal{I}}_2 - L_2' \dot{\mathcal{I}}_2 - \sqrt{L_2' L_3} \dot{\mathcal{I}}_3, \\ R_3 \mathcal{I}_3 &= -\sqrt{L_2' L_3} \dot{\mathcal{I}}_2 - L_3 \dot{\mathcal{I}}_3. \end{aligned} \quad (136.23)$$

Для уменьшения громоздкости формул предположим, что омическое сопротивление R_1 пренебрежимо мало, и положим $R_1 = 0$. Если, кроме того, электродвижущая сила \mathcal{E} меняется синусоидально, то для установившегося режима получим

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \frac{(\alpha_2 \alpha_3 - 1) - i(\alpha_2 + \alpha_2' + \alpha_3)}{\alpha_2' + \alpha_3 - i} \frac{\mathcal{E}}{\omega L_1}, \\ \mathcal{I}_2 &= -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{\alpha_3 - i}{\alpha_2' + \alpha_3 - i} \frac{\mathcal{E}}{R_2}, \\ \mathcal{I}_3 &= \sqrt{\frac{L_2 L_3}{L_1 L_2'}} \frac{\alpha_2'}{\alpha_2' + \alpha_3 - i} \frac{\mathcal{E}}{R_3}, \end{aligned} \quad (136.24)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\alpha_2 = \frac{\omega L_2}{R_2}, \quad \alpha_2' = \frac{\omega L_2'}{R_2}, \quad \alpha_3 = \frac{\omega L_3}{R_3}. \quad (136.25)$$

Здесь R_2 означает сумму сопротивлений вторичной обмотки первого трансформатора, первичной обмотки второго и соединяющих их проводов. Если $R_2 = 0$,

то $\alpha'_2 = \infty$ и из последней формулы (136.24) получаем

$$\mathcal{I}_3 = \sqrt{\frac{L_2 L_3}{L_1 L'_2}} \frac{\mathcal{E}}{R_3} = \frac{n_2 n_3}{n_1 n'_2} \frac{\mathcal{E}}{R_3}. \quad (136.26)$$

Смысл этой формулы ясен. Первый трансформатор повышает напряжение в n_2/n_1 раз, второй — в n_3/n'_2 раз, так что напряжение на выходе второго трансформатора становится равным $\frac{n_2 n_3}{n_1 n'_2} \mathcal{E}$. Если оба трансформатора одинаковы ($n_1 = n_3$, $n_2 = n'_2$), то $\mathcal{I}_3 = \mathcal{E}/R_3$. Ток на выходе \mathcal{I}_3 получается таким же, как если бы источник напряжения \mathcal{E} был непосредственно замкнут на сопротивление R_3 .

Мощность тока в первичной цепи

$$P_0 = \frac{1}{2} \frac{\alpha_2 \alpha_3 (\alpha'_2 + \alpha_3) + \alpha_2}{(\alpha'_2 + \alpha_3)^2 + 1} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\omega L_1}. \quad (136.27)$$

Потребляемые мощности равны соответственно

$$\begin{aligned} P_1 &= 0, \\ P_2 &= \frac{1}{2} \frac{\alpha_2 (\alpha_3^2 + 1)}{(\alpha'_2 + \alpha_3)^2 + 1} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\omega L_1}, \\ P_3 &= \frac{1}{2} \frac{\alpha_2 \alpha'_2 \alpha_3}{(\alpha'_2 + \alpha_3)^2 + 1} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\omega L_1}. \end{aligned} \quad (136.28)$$

Если $R_2 = 0$, то $\alpha_2 = \infty$, $\alpha'_2 = \infty$, причем $\alpha_2/\alpha'_2 = L_2/L'_2$, т. е. α_2 и α'_2 — бесконечно большие одного порядка. Используя это, находим $P_2 = 0$, $P_3 = P_0$. Вся энергия, вырабатываемая в первичной цепи, передается без потерь потребителю.

При неизменных параметрах всех обмоток, за исключением последней, потребляемая мощность P_3 максимальна при $\alpha_3 = \sqrt{1 + \alpha_2'^2}$, или приблизительно при $\alpha_3 = \alpha_2'$. Таким образом,

$$P_{3 \text{ макс}} \approx \frac{\alpha_2 |\mathcal{E}|^2}{8\omega L_1}. \quad (136.29)$$

Такова же мощность, теряемая в линии передачи, так что к. п. д. в этом случае составляет всего около 50%. В общем случае к. п. д.

$$[\eta] = \frac{P_3}{P_0} = \frac{\alpha'_2 \alpha_3}{1 + \alpha_3 (\alpha'_2 + \alpha_3)} \quad (136.30)$$

достигает максимума при $\alpha_3 = 1$. Если учесть, что $\alpha_2' \gg 1$, то максимальный к. п. д. приблизительно равен $\eta_{\text{макс}} \approx 1$. При этом

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{\alpha_2}{2} \frac{\alpha'_2 + \alpha_3 + 1}{(\alpha'_2 + \alpha_3)^2 + 1} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\omega L_1} \approx \frac{\alpha_2}{2\alpha_2'} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\omega L_1}, \\ P_3 &= \frac{\alpha_2}{2} \frac{\alpha_3'}{(\alpha_3' + \alpha_3)^2 + 1} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\omega L_1} \approx \frac{\alpha_2}{2\alpha_2'} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\omega L_1} \approx P_0. \end{aligned} \quad (136.31)$$

Наконец, мощность холостого хода трансформатора ($\alpha_3 = 0$) равна

$$P_0^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2'^2} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\omega L_1} \approx \frac{1}{2} \frac{\alpha_2}{\alpha_2'^2} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\omega L_1}. \quad (136.32)$$

Таким образом, при максимальном к. п. д.

$$\frac{P_3}{P_0^{(0)}} \approx \alpha_2'. \quad (136.33)$$