§ 137. Колебания с двумя степенями свободы

1. Рассмотрим электрические колебания в двух колебательных контурах, индуктивно связанных между собою (рис. 344). Будем считать, что нет омических сопротивлений и внешних сил, действующих на систему (свободные колебания). Поскольку колебания

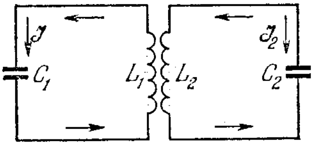

Рис. 344.

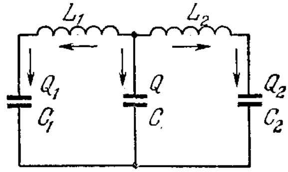

Рис. 345.

в одном контуре влияют на колебания в другом, они называются *связанными колебаниями*. Такие колебания описываются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} &\frac{Q_1}{C_1} + L_1\dot{\mathscr{I}}_1 + L_{12}\dot{\mathscr{I}}_2 = 0, \\ &\frac{Q_2}{C_2} + L_2\dot{\mathscr{I}}_2 + L_{21}\dot{\mathscr{I}}_1 = 0, \end{aligned} \qquad (137.1)$$

или

$$\begin{aligned} &L_1\ddot{Q}_1 + L_{12}\ddot{Q}_2 + \frac{Q_1}{C_1} = 0, \\ &L_{21}\ddot{Q}_1 + L_2\ddot{Q}_2 + \frac{Q_2}{C_2} = 0. \end{aligned} \qquad (137.2)$$

Разрешив эти уравнения относительно производных, приведем их к виду

$$\begin{aligned} &\ddot{Q}_1 + a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 = 0, \\ &\ddot{Q}_2 + a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 = 0, \end{aligned} \qquad (137.3)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{L_2}{C_1(L_1L_2 - L_{12}L_{21})}, & a_{12} &= -\frac{L_{12}}{C_2(L_1L_2 - L_{12}L_{21})}, \\ a_{21} &= -\frac{L_{21}}{C_1(L_1L_2 - L_{12}L_{21})}, & a_{22} &= \frac{L_1}{C_2(L_1L_2 - L_{12}L_{21})}. \end{aligned} \qquad (137.4)$$

Прежде чем идти дальше, рассмотрим такие же колебательные контуры, но с емкостной связью (рис. 345). В этом случае

$$\begin{aligned} &\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q}{C} + L_1\dot{\mathscr{I}}_1 = 0, \\ &\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q}{C} + L_2\dot{\mathscr{I}}_2 = 0. \end{aligned} \qquad (137.5)$$

Продифференцировав эти уравнения по времени и приняв во внимание, что $\mathscr{I} = \mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2$, или $\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\mathscr{I}}_1 + a_{11}\mathscr{I}_1 + a_{12}\mathscr{I}_2 = 0, \\ \ddot{\mathscr{I}}_2 + a_{21}\mathscr{I}_1 + a_{22}\mathscr{I}_2 = 0, \end{aligned} \tag{137.6}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right), & a_{12} &= \frac{1}{L_1 C}, \\ a_{21} &= \frac{1}{L_2 C}, & a_{22} &= \frac{1}{L_2}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right). \end{aligned} \tag{137.7}$$

Мы видим, что в обоих случаях колебания описываются *однотипными системами* линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. К уравнениям такого же типа приводит задача о малых колебаниях механических систем с двумя степенями свободы, например двух *связанных маятников*. Целесообразно рассмотреть все эти колебания совместно. Поэтому мы не будем конкретизировать колебательную систему, а предположим только, что ее конфигурация определяется какими-то координатами x_1 и x_2, подчиняющимися системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0, \end{aligned} \tag{137.8}$$

где a_{ik} — постоянные коэффициенты. Значения этих коэффициентов, как и смысл координат x_1 и x_2, устанавливаются в каждом конкретном случае в отдельности.

2. Попытаемся сначала найти частное решение системы уравнений (137.8):

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, \qquad x_2 = A_2 e^{i\omega t}, \tag{137.9}$$

где A_1 и A_2 — постоянные. После подстановки в (137.8) получаем

$$\begin{aligned} (a_{11} - \omega^2) A_1 + a_{12}A_2 = 0, \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - \omega^2) A_2 = 0. \end{aligned} \tag{137.10}$$

Такая система линейных однородных уравнений имеет отличное от нуля решение только при выполнении условия

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{137.11}$$

Это — квадратное уравнение относительно ω^2. Обозначим его корни через ω_1^2 и ω_2^2. Не представляет труда показать, что в обоих примерах, приведенных выше, оба эти корня вещественны и притом положительны. В общем случае, когда система не конкретизирована, условие вещественности и положительности корней должно быть введено в качестве независимого требования, которому должны удовлетворять коэффициенты a_{ik}. Для ω получаются четыре значения: $\pm\omega_1$ и $\pm\omega_2$. Однако введение отрицательных ω не дает ничего нового. Действительно, коэффициенты уравнений (137.8) *вещественны* и нас должны интересовать лишь *вещественные решения* этих уравнений. Но вещественные части выражений $Ae^{i\omega t}$ и $Ae^{-i\omega t}$ имеют один и тот же вид, а именно $C\cos(\omega t+\delta)$, где C и δ — произвольные постоянные. Поэтому, не теряя общности, можно ограничиться лишь положительными корнями ω_1 и ω_2.

Как видно из (137.10), коэффициенты A_1 и A_2 не независимы. Их отношение однозначно определяется значениями коэффициентов a_{ik} и частоты ω:

$$h\equiv\frac{A_2}{A_1}=\frac{\omega^2-a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{21}}{\omega^2-a_{22}}. \tag{137.12}$$

Соответственно двум значениям частоты ω получаются и два значения отношения h, обозначаемые в дальнейшем через h_1 и h_2. Таким образом, мы нашли два частных решения уравнений (137.8).

Первое решение: $x_1=e^{i\omega_1 t}$, $x_2=h_1e^{i\omega_1 t}$.

Второе решение: $x_1=e^{i\omega_2 t}$, $x_2=h_2e^{i\omega_2 t}$.

Общее решение выражается *линейной комбинацией* этих двух частных решений с постоянными коэффициентами, т. е.

$$\begin{aligned} x_1&=C_1e^{i\omega_1 t}+C_2e^{i\omega_2 t},\\ x_2&=h_1C_1e^{i\omega_1 t}+h_2C_2e^{i\omega_2 t}, \end{aligned} \tag{137.13}$$

где C_1 и C_2 — произвольные комплексные постоянные. Они определяют *амплитуды* и *фазы колебаний* и могут быть найдены из *начальных условий*: по двум значениям x_1 и x_2 и их производных в момент времени $t=0$.

Введем обозначения:

$$\xi_1=C_1e^{i\omega_1 t},\qquad \xi_2=C_2e^{i\omega_2 t}. \tag{137.14}$$

Тогда

$$x_1=\xi_1+\xi_2,\qquad x_2=h_1\xi_1+h_2\xi_2, \tag{137.15}$$

$$\xi_1=\frac{h_2x_1-x_2}{h_2-h_1},\qquad \xi_2=\frac{-h_1x_1+x_2}{h_2-h_1}. \tag{137.16}$$

Отсюда видно, что ξ_1 и ξ_2 могут быть приняты за *новые координаты*, определяющие *конфигурацию системы*. Координата ξ_1 совершает гармонические колебания с частотой ω_1, а координата ξ_2 — с частотой ω_2. Эти координаты называются *нормальными координатами*, а совершаемые ими колебания — *нормальными колебаниями* или *модами*. Таким образом, в общем случае *колебание системы представляет собой суперпозицию двух нормальных колебаний с частотами ω_1 и ω_2.*

3. Рассмотрим симметричный случай, когда $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$. В примерах, приведенных выше (см. рис. 344 и 345), такой случай реализуется, когда параметры обоих колебательных контуров одинаковы. Уравнение (137.11) в этом случае переходит в $(\omega^2 - a_{11})^2 = a_{12}^2$, и, следовательно,

$$\begin{array}{ll} \omega_1^2 = a_{11} + a_{12}, & \omega_2^2 = a_{11} - a_{12}, \\ h_1 = 1, & h_2 = -1, \\ x_1 = \xi_1 + \xi_2, & x_2 = \xi_1 - \xi_2, \\ \xi_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, & \xi_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2}. \end{array}$$

Например, в случае рис. 345 получаем

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{2}{C}\right), \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_1 C_1}.$$

Последнюю формулу легко понять. Действительно, пусть в системе совершается только нормальное колебание с частотой ω_2, а колебание с частотой ω_1 не возбуждено. Это значит, что $2\xi_1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \mathcal{I} = 0$, т. е. ток через конденсатор C не течет. Поэтому на колебания с частотой ω_2 конденсатор C не оказывает никакого влияния. Система ведет себя как один колебательный контур, в котором катушки самоиндукции и конденсаторы соединены последовательно. Результирующая индуктивность такого контура $2L_1$, емкость $C_1/2$, а собственная частота $\omega = 1/\sqrt{L_1 C_1} = \omega_2$.

4. Интересное явление наблюдается в симметричном случае, когда связь между обеими подсистемами, из которых состоит сложная система, *слабая*. В этом случае, ввиду малости коэффициента a_{12}, частоты нормальных колебаний ω_1 и ω_2 мало отличаются друг от друга. Одна из них немного больше, а другая немного меньше собственной частоты подсистемы $\omega_0 = \sqrt{a_{11}}$. Колебания координат x_1 и x_2 представляются суперпозицией нормальных колебаний с мало отличающимися частотами. На протяжении нескольких колебаний обе координаты x_1 и x_2 колеблются почти так, как если бы связи не было. Наличие слабой связи приводит к возникновению *биений*, схематически изображенных на рис. 314. Когда амплитуда координаты x_1 проходит через максимум, амплитуда координаты x_2 обращается в нуль, и наоборот. Явление легко демонстрируется с помощью двух одинаковых математических маятников, между которыми установлена слабая связь. Отклонив первый маятник, наблюдают, что амплитуда его колебаний медленно убывает и второй маятник также начинает колебаться. На протяжении нескольких десятков периодов колебания первого маятника полностью затухнут, а колебания второго станут максимальными. После этого начнется затухание колебаний второго маятника. Первый маятник, наоборот, начнет раскачиваться, и по истечении такого же числа

десятков периодов его амплитуда вернется к исходному значению. Затем процесс передачи колебаний от одного маятника к другому будет повторяться, пока в результате действия сил трения колебания не прекратятся.

5. Затухающие собственные колебания в связанных системах рассматриваются так же, как и незатухающие. Надо только ввести в уравнения (137.6) линейные члены, содержащие первые производные $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$. Можно также рассмотреть вынужденные колебания, введя внешние силы, действующие на систему. Это делается так же, как и в случае системы с одной степенью свободы. Наконец, когда число степеней свободы системы n больше двух, то для задания ее конфигурации требуется n координат. Если эти координаты описываются линейными уравнениями типа (137.8), то всякое колебание системы также представится суперпозицией *нормальных колебаний с n частотами*. Некоторые из этих частот могут совпадать. Тогда говорят о *вырождении*. Вырожденный случай можно свести к невырожденному. Для этого надо «снять вырождение», т. е. слегка изменить коэффициенты уравнений, а затем совершить предельный переход к первоначальным значениям этих коэффициентов.

§ 138. Волновое уравнение

1. Об *электромагнитных возмущениях*, или *волнах*, уже говорилось в § 83. Там на примере плоского возмущения было выяснено, как возбуждаются электромагнитные волны, и вычислена скорость их распространения. Вернемся снова к этому вопросу, чтобы придать изложению математически более простой и систематический характер. Кроме того, мы рассмотрим некоторые новые вопросы. Многие вопросы, относящиеся к учению о волнах (отражение, преломление, интерференция, дифракция, дисперсия и пр.), мы сознательно опускаем, так как они будут подробно рассмотрены в следующем томе.

Начнем с простой механической аналогии. Если ударить по какому-либо месту натянутого шнура, то от места удара в противоположных направлениях побегут два поперечных возмущения. Рассмотрим одно из них, например возмущение, распространяющееся вправо. Положение невозмущенного натянутого шнура примем за ось X. Тогда каждую материальную точку шнура можно характеризовать абсциссой x, которую она имела на невозмущенном шнуре, а само возмущение — смещением s этой точки из положения равновесия, как функции координаты x и времени t: $s = s(x, t)$. Однако эта функция зависит не от x и t в отдельности, а от определенной комбинации их, которая будет найдена ниже. На рис. 346 вверху изображено положение возмущенного шнура в момент времени $t = 0$. Эта начальная форма шнура может быть представлена уравнением $s(\xi, 0) = f(\xi)$, где ξ — абсцисса какой-то произвольной