десятков периодов его амплитуда вернется к исходному значению. Затем процесс передачи колебаний от одного маятника к другому будет повторяться, пока в результате действия сил трения колебания не прекратятся.

5. Затухающие собственные колебания в связанных системах рассматриваются так же, как и незатухающие. Надо только ввести в уравнения (137.6) линейные члены, содержащие первые производные $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$. Можно также рассмотреть вынужденные колебания, введя внешние силы, действующие на систему. Это делается так же, как и в случае системы с одной степенью свободы. Наконец, когда число степеней свободы системы n больше двух, то для задания ее конфигурации требуется n координат. Если эти координаты описываются линейными уравнениями типа (137.8), то всякое колебание системы также представится суперпозицией *нормальных колебаний с n частотами*. Некоторые из этих частот могут совпадать. Тогда говорят о *вырождении*. Вырожденный случай можно свести к невырожденному. Для этого надо «снять вырождение», т. е. слегка изменить коэффициенты уравнений, а затем совершить предельный переход к первоначальным значениям этих коэффициентов.

§ 138. Волновое уравнение

1. Об *электромагнитных возмущениях*, или *волнах*, уже говорилось в § 83. Там на примере плоского возмущения было выяснено, как возбуждаются электромагнитные волны, и вычислена скорость их распространения. Вернемся снова к этому вопросу, чтобы придать изложению математически более простой и систематический характер. Кроме того, мы рассмотрим некоторые новые вопросы. Многие вопросы, относящиеся к учению о волнах (отражение, преломление, интерференция, дифракция, дисперсия и пр.), мы сознательно опускаем, так как они будут подробно рассмотрены в следующем томе.

Начнем с простой механической аналогии. Если ударить по какому-либо месту натянутого шнура, то от места удара в противоположных направлениях побегут два поперечных возмущения. Рассмотрим одно из них, например возмущение, распространяющееся вправо. Положение невозмущенного натянутого шнура примем за ось X. Тогда каждую материальную точку шнура можно характеризовать абсциссой x, которую она имела на невозмущенном шнуре, а само возмущение — смещением s этой точки из положения равновесия, как функции координаты x и времени t: $s = s(x, t)$. Однако эта функция зависит не от x и t в отдельности, а от определенной комбинации их, которая будет найдена ниже. На рис. 346 вверху изображено положение возмущенного шнура в момент времени $t = 0$. Эта начальная форма шнура может быть представлена уравнением $s(\xi, 0) = f(\xi)$, где ξ — абсцисса какой-то произвольной материальной точки шнура A (ξ). Через время t возмущение на шнуре переместится вправо на расстояние $OO' = vt$, где v — *скорость распространения возмущения.* Это значит, что смещение $s(x, t)$ точки A (x) с координатой x в момент t будет таким же, каким было смещение точки A (ξ) с координатой ξ в момент $t = 0$, если только $x - \xi = vt$, т. е. $s(x, t) = s(\xi, 0) = f(\xi) = f(x - vt)$. Таким образом, опуская аргументы x и t в функции $s(x, t)$, находим для смещения s следующее выражение:

$$s = f(x - vt). \tag{138.1}$$

Следовательно, если возмущение распространяется вправо, то величина смещения s зависит только от комбинации аргументов $x - vt$. Если эта комбинация остается постоянной, то будет оставаться постоянным и смещение s. Это значит, что уравнение $x - vt = \text{const}$ есть *уравнение фронта распространяющегося возмущения.* Дифференцируя его по t, находим $dx/dt = +v$, т. е. v, как и должно быть, есть скорость распространения волнового фронта.

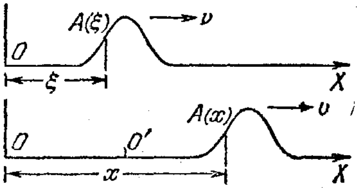

Рис. 346.

Таким же путем убеждаемся, что возмущение, распространяющееся влево, описывается уравнением

$$s = f(x + vt). \tag{138.2}$$

Если же возмущение идет и вправо и влево, то

$$s = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \tag{138.3}$$

Вид функций f_1 и f_2 определяется *начальными условиями*, т. е. заданием начальной формы шнура и начального распределения скоростей, а потому может быть весьма разнообразным.

2. Можно получить уравнение, *не содержащее совсем начальных условий*, а потому пригодное для описания распространения любых волновых возмущений в шнуре. В этом отношении оно аналогично уравнениям Ньютона в механике, которые также не содержат начальных условий. Независимость от начальных условий связана с тем, что это уравнение (как и уравнение, выражающее второй закон Ньютона) *дифференциальное.* Для его получения дифференцируем выражение (138.1) сначала по x, а затем по t и находим

$$\frac{\partial s}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial s}{\partial t} = f' \frac{\partial (x - vt)}{\partial t} = -vf',$$

где f' означает производную по аргументу $x - vt$, от которого зависит функция f. Исключая f', находим

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Это уравнение не содержит начальных условий. Однако оно описывает не все возмущения, а только *возмущения, распространяющиеся вправо.* Возмущения, распространяющиеся влево, описываются таким же уравнением, но со знаком плюс в правой части. Для нахождения уравнения, справедливого для обоих возмущений, а также их суперпозиции (138.3), дифференцируем вторично и находим

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=f'', \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=-vf''\frac{\partial(x-vt)}{\partial t}=v^2 f'',$$

или после исключения f''

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0. \tag{138.4}$$

Легко убедиться, что такому же уравнению удовлетворяет и возмущение (138.2), а также более общее возмущение (138.3). Дифференциальное уравнение (138.4) называется *волновым уравнением.* Оно справедливо для любых возмущений, распространяющихся в шнуре.

Выражение (138.3), в котором f_1 и f_2 — произвольные функции, есть *общее решение* волнового уравнения (138.4). Чтобы убедиться в этом, введем новые независимые переменные $\xi=x-vt$ и $\eta=x+vt$. В этих переменных уравнение (138.4) принимает вид

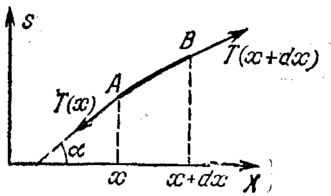

Рис. 347.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial\xi\,\partial\eta}=0.$$

Общее решение его $s=f_1(\xi)+f_2(\eta)$, и наше утверждение доказано. Следовательно, всякий процесс, описываемый волновым уравнением (138.4), в общем случае представляет собой два возмущения, распространяющихся со скоростью v в противоположных направлениях оси X.

3. Приведем два примера на применение уравнения (138.4). Выведем уравнение малых поперечных колебаний гибкого натянутого шнура, исходя из уравнений механики. Будем считать, что вся упругость шнура вызвана его *натяжением* T, упругостью формы пренебрегаем. На элемент AB шнура (рис. 347) слева действует сила натяжения $T(x)$. Ее вертикальная составляющая будет $-T(x)\operatorname{tg}\alpha=T(x)\frac{\partial s}{\partial x}$ (положительное направление выбрано вверх). Аналогичная сила действует на правый конец элемента AB. Результирующая этих двух сил будет

$$\left(T\frac{\partial s}{\partial x}\right)_B-\left(T\frac{\partial s}{\partial x}\right)_A=\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial s}{\partial x}\right)dx.$$

Для малых колебаний угол α будет мал, и можно пренебречь изменением натяжения T вдоль шнура. В этом приближении предыдущее выражение переходит в $T\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}\,dx$. Кроме того, можно также пренебречь изменениями линейной плотности шнура δ при его удлинениях и сжатиях. Приравняв массу элемента $\delta\,dx$, умноженную на его ускорение $\partial^2 s/\partial t^2$, действующей силе, находим

$$\delta\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

Это уравнение совпадает с (138.4), а потому для скорости распространения v в шнуре получаем

$$v=\sqrt{T/\delta}. \tag{138.5}$$

Такая формула уже была выведена нами другим способом (см. т. I, § 84). Совершенно так же могут быть выведены формулы для скорости распространения упругих возмущений в стержнях, в неограниченных упругих средах, а также в жидкостях и газах (см. т. I, §§ 81, 83, 85).

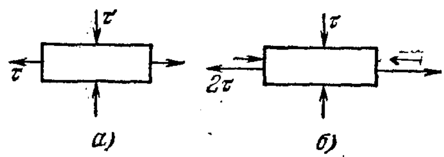

Рис. 348.

В качестве второго примера рассмотрим плазму в постоянном магнитном поле B, обладающую достаточно высокой проводимостью. Выделим в ней какую-либо тонкую силовую трубку. Если плазма сместится поперек магнитного поля, то благодаря высокой проводимости ее магнитный поток через поперечное сечение трубки сохранится (см. § 71). Магнитные силовые линии как бы *вморожены в вещество* и движутся вместе с ним. Но вдоль магнитной трубки действует максвелловское натяжение $\tau = B^2/(8\pi)$. Поэтому в плазме вдоль магнитных силовых линий могут распространяться *поперечные возмущения*, аналогичные возмущениям в натянутом шнуре. Такие возмущения называются *магнитогидродинамическими* или *альвеновскими волнами*. Они были теоретически предсказаны Альвеном (р. 1908). Есть, однако, отличие гидродинамических волн от волн в натянутом шнуре. Оно состоит в том, что магнитная силовая трубка подвергается не только продольному натяжению, но и равному ему боковому давлению (рис. 348, *а*). Однако боковое давление легко исключить. Для этого к основаниям элемента трубки надо приложить натяжение τ и равное ему давление. Эти напряжения ничего не меняют, так как они взаимно компенсируют друг друга. Но тогда система максвелловских натяжений сведется к продольному натяжению $2\tau = B^2/(4\pi)$ и всестороннему давлению τ (рис. 348, *б*). Всестороннее давление на распространение поперечных возмущений не влияет. Поэтому можно воспользоваться формулой (138.5), полагая в ней $T = 2S\tau$, $\delta = S\rho$, где S — площадь поперечного сечения магнитной трубки, а ρ — плотность плазмы. Таким путем для скорости распространения магнитогидродинамических волн найдем

$$v = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{138.6}$$

4. Уравнение (138.4) есть «одномерное» волновое уравнение, поскольку оно относится к распространению процессов только *вдоль одного направления*, а величина s, характеризующая описываемый процесс, зависит только от одной пространственной координаты x и времени t. Волновые процессы, распространяющиеся в пространстве, описываются *«трехмерным»* волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0. \tag{138.7}$$

Однако, как правило, мы этим уравнением пользоваться не будем.

§ 139. Плоские электромагнитные волны

1. Пусть в неограниченной однородной среде распространяется *без поглощения* какое-то электромагнитное возмущение. Отсутствие поглощения означает, что при любом возмущении в среде не выделяется джоулево тепло. Следовательно, величина $\boldsymbol{jE} = \lambda E^2$ должна обращаться в нуль, каково бы ни было поле $\boldsymbol{E}$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$, т. е. когда среда является диэлектриком. Допустим, кроме того, что объемных электрических зарядов в среде нет. Тогда уравнения Максвелла примут вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}, \\ &\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0. \end{aligned} \tag{139.1}$$

Рассмотрим частное решение их, когда все величины зависят только от x и t. Переходя к координатной форме, получим в этом случае

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t}, \\ &\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ &\frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{139.2}$$

Из последних четырех уравнений следует, что D_x и B_x не зависят от x и t, т. е. величины постоянные. Это — *статические поля*,