возмущений не влияет. Поэтому можно воспользоваться формулой (138.5), полагая в ней $T = 2S\tau$, $\delta = S\rho$, где S — площадь поперечного сечения магнитной трубки, а ρ — плотность плазмы. Таким путем для скорости распространения магнитогидродинамических волн найдем

$$v = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}. \qquad (138.6)$$

4. Уравнение (138.4) есть «одномерное» волновое уравнение, поскольку оно относится к распространению процессов только *вдоль одного направления*, а величина s, характеризующая описываемый процесс, зависит только от одной пространственной координаты x и времени t. Волновые процессы, распространяющиеся в пространстве, описываются «*трехмерным*» волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0. \qquad (138.7)$$

Однако, как правило, мы этим уравнением пользоваться не будем.

§ 139. Плоские электромагнитные волны

1. Пусть в неограниченной однородной среде распространяется *без поглощения* какое-то электромагнитное возмущение. Отсутствие поглощения означает, что при любом возмущении в среде не выделяется джоулево тепло. Следовательно, величина $\boldsymbol{jE} = \lambda E^2$ должна обращаться в нуль, каково бы ни было поле $\boldsymbol{E}$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$, т. е. когда среда является диэлектриком. Допустим, кроме того, что объемных электрических зарядов в среде нет. Тогда уравнения Максвелла примут вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}},\\ &\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0. \end{aligned} \qquad (139.1)$$

Рассмотрим частное решение их, когда все величины зависят только от x и t. Переходя к координатной форме, получим в этом случае

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t},\\ &\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t},\\ &\frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0. \end{aligned} \qquad (139.2)$$

Из последних четырех уравнений следует, что D_x и B_x не зависят от x и t, т. е. величины постоянные. Это — *статические поля*, накладывающиеся на переменное поле электромагнитного возмущения. Они не влияют на распространение возмущения и могут быть отброшены без ущерба для общности. Оставшиеся четыре уравнения распадаются на две группы *независимых уравнений*. В одну из них входят y-составляющие электрического поля и z-составляющие магнитного поля, в другую — z-составляющие электрического и y-составляющие магнитного поля. Обе эти группы *однотипны*, а потому можно ограничиться рассмотрением одной из них. В качестве таковой возьмем систему уравнений, содержащую E_y и H_z. С помощью соотношений $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ преобразуем ее к виду

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{139.3}$$

причем мы опустили у полей индексы y и z, предполагая, что вектор $\boldsymbol{E}$ направлен параллельно оси Y, а вектор $\boldsymbol{H}$ — параллельно оси Z. Дифференцируя первое уравнение по t, а второе по x, исключаем H и находим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{139.4}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0, \tag{139.5}$$

где введено обозначение

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{139.6}$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяют *одному и тому же волновому уравнению*. Это доказывает, что рассматриваемое возмущение состоит из плоских волн, распространяющихся со скоростью v параллельно оси X. Возмущение поперечно, т. е. векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ перпендикулярны к оси X, вдоль которой происходит распространение. Возьмем волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X:

$$E = f(x - vt), \quad H = g(x - vt). \tag{139.7}$$

Тогда $\partial E/\partial t = -vf'$, $\partial H/\partial x = g'$, и после подстановки в первое уравнение (139.3) получится $g' = \frac{\varepsilon v}{c} f'$. Интегрируя это соотношение и опуская постоянные интегрирования (имеющие смысл статических полей, не представляющих интереса в рассматриваемом вопросе), придем к соотношению $g = \frac{\varepsilon v}{c} f$, или $H = \frac{v}{c} D$. Аналогично поступаем со вторым уравнением (139.3). Таким образом,

$$H = \frac{v}{c} D, \quad E = \frac{v}{c} B, \tag{139.8}$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}[\boldsymbol{vD}],\quad \boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}[\boldsymbol{vB}], \tag{139.9}$$

где $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости, с которой распространяется электромагнитное возмущение.

Векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$ (а также векторы $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{v}$) *взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему*. Взаимное расположение их показано на рис. 349, *а*. Это правовинтовое соотношение указанных векторов есть *внутреннее свойство* бегущей электромагнитной волны, не зависящее ни от какой координатной системы. Повернем на рис. 349, *а* тройку векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$ вокруг оси X на 90°. Получится расположение, представленное на рис. 349, *б*.

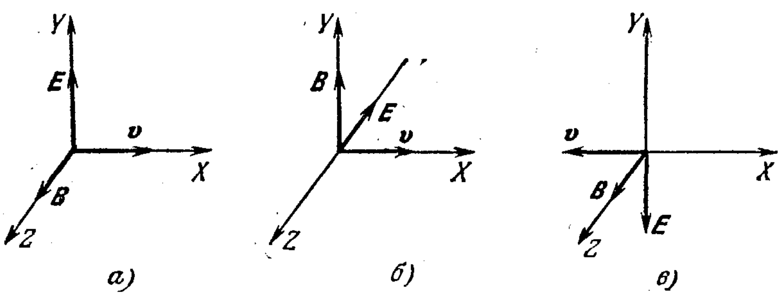

Рис. 349.

Теперь электрический вектор будет направлен по оси Z, а магнитный — по оси Y. Такому расположению соответствует вторая группа уравнений, входящая в систему (139.2). Мы видим, что действительно нет необходимости в особом исследовании этой группы. Повернем, далее, тройку векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$ на рис. 349, *а* вокруг оси Z на 180°. Получится расположение, приведенное на рис. 349, *в*, которому соответствует волна, распространяющаяся влево. Таким образом, нет необходимости особо рассматривать и эту волну.

2. Вид функции f (или g) в плоской бегущей электромагнитной волне зависит от *начальных условий* и может быть каким угодно. Особо важное значение имеют *синусоидальные*, или *монохроматические, волны*. Они могут быть представлены в виде

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right),\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right), \tag{139.10}$$

где $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ — постоянные, называемые *амплитудами волны*. Если ввести обозначение

$$k=\omega/v, \tag{139.11}$$

то

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \cos(\omega t - kx). \tag{139.12}$$

Величина k называется *волновым числом*. Если фиксировать координату x, то получатся синусоидальные функции времени, описывающие гармонические колебания с круговой частотой ω. Напротив, если фиксировать время t, то получится синусоидальное распределение поля $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ в пространстве в рассматриваемый момент

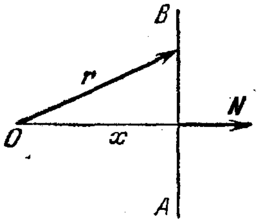

Рис. 350.

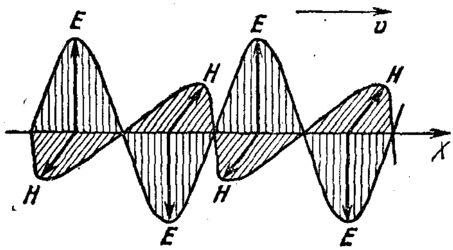

Рис. 351.

времени. Пространственный период поля $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ называется *длиной волны*. Он равен

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu}. \tag{139.13}$$

Можно записать бегущую монохроматическую электромагнитную волну *в векторной форме*, не содержащей никаких координат. Для этого введем единичный вектор $\boldsymbol{N}$ нормали к фронту волны AB, т. е. к плоскости постоянной фазы $\omega t - kx = \text{const}$. Тогда, как видно из рис. 350, $x = (\boldsymbol{Nr})$ и, следовательно, $kx = (\boldsymbol{kr})$, где $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{N}$ — так называемый *волновой вектор*. В результате получится

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{kr}), \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{kr}), \tag{139.14}$$

или в комплексной форме

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}. \tag{139.15}$$

Здесь $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ уже могут быть *комплексными*, что означает введение начальных фаз. Однако, ввиду соотношений (139.8) или (139.9), в бегущей монохроматической волне электрический и магнитный векторы всегда колеблются *в одинаковых фазах*. Вид такой волны в пространстве в какой-либо момент времени изображен на рис. 351. Чтобы составить представление об изменении поля во времени, надо вообразить, что весь рисунок равномерно движется вправо со скоростью v. Чтобы получить волну, распространяющуюся влево, надо изменить на противоположное направление одного из векторов: $\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{H}$.