§ 140. Стоячие волны

1. Пусть в натянутом шнуре слева направо распространяется поперечная синусоидальная волна $s_1 = a\cos(\omega t - kx)$. Если изменить знак у kx, то получится волна $s_2 = a\cos(\omega t + kx)$, распространяющаяся справа налево. Такую волну можно получить, если отразить от конца шнура первую волну. Поэтому волну s_1 можно назвать *падающей*, а волну s_2 — *отраженной*. Никакой добавочной фазы в выражение для отраженной волны можно не вводить, если условиться помещать начало координат в точке шнура, в которой падающая и отраженная волны находятся в одинаковых фазах. Это и предполагается в дальнейшем. Предположим, что отражение полное, т. е. амплитуды падающей и отраженной волн одинаковы. От наложения таких волн возникает возмущение

$$s = s_1 + s_2 = 2a\cos kx\cos\omega t, \tag{140.1}$$

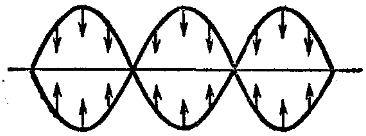

Рис. 352.

называемое *стоячей волной*. В этом возмущении каждая точка шнура, характеризуемая координатой x, совершает гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой $2a\cos kx$. Амплитуда таких колебаний обращается в нуль в тех точках, где $\cos kx = 0$. Такие точки называются *узлами смещения*. Посередине между двумя соседними узлами амплитуда колебаний $2a\cos kx$ максимальна, соответствующие точки называются *пучностями смещения*. Расстояние Δx между двумя соседними узлами или пучностями определится из условия $k\,\Delta x = \pi$, откуда $\Delta x = \pi/k = \lambda/2$. Все точки между двумя соседними узлами колеблются в одинаковых фазах. Они одновременно проходят через положение равновесия и одновременно достигают максимума. При переходе через узел знак s меняется на противоположный. Это значит, что при этом фаза колебания скачкообразно изменяется на π. Однако такой скачок не ведет к нарушению непрерывности колебательного процесса, так как он совершается при нулевой амплитуде. Картина колебаний в стоячей волне представлена на рис. 352. Две синусоиды на этом рисунке изображают крайние положения, которых достигает шнур при своих колебаниях, стрелками указано направление движения, которое возникнет из этих крайних положений. Узлы смещения как бы разделяют шнур на автономные области, в которых совершаются *независимые гармонические колебания*. Никакой передачи движения от одной области к другой, а следовательно, и перетекания энергии через узлы не происходит. Иначе говоря, нет никакого распространения возмущения вдоль шнура. Вот почему возмущение, представляемое выражением (140.1), называется *стоячей волной*. Заметим еще, что в узлах смещения максимальны производные $\partial s/\partial x$, т. е. *деформации шнура*, а в пучностях смещения $\partial s/\partial x = 0$. Поэтому узлы смещения являются *пучностями деформации*, а пучности смещения — *узлами деформации*.

2. Выше мы рассуждали так, как если бы длина шнура была не ограничена. В этом случае частота ω, а следовательно, и длина волны $\lambda = vT$ могут быть какими угодно. Не то будет, когда оба конца шнура закреплены. Если в шнуре с закрепленными концами возбудить какое-то произвольное возмущение и затем предоставить его самому себе, то это возмущение побежит в обе стороны и начнет отражаться от концов шнура. В шнуре возникнет довольно сложное *нестационарное движение*. ***Стационарное движение в виде стоячей волны возможно лишь при вполне определенных частотах.*** Дело в том, что на закрепленных концах шнура должны выполняться определенные *граничные условия*: в них смещение s все время должно равняться нулю. Значит, если в шнуре возбуждена стоячая волна, то концы шнура должны быть ее узлами. Отсюда следует, что на длине шнура l должно укладываться целое число полуволн: $l = n\lambda/2$, откуда

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{\pi v}{l} n. \tag{140.2}$$

Целое число n может быть каким угодно. Получается бесконечный набор возможных типов стационарных колебаний, которым соответствует дискретный ряд частот. Эти колебания называются *собственными* или *нормальными* колебаниями шнура. Они имеют такой же смысл, что и нормальные колебания, или моды, введенные в § 137 для дискретных систем. В шнуре возможных типов нормальных колебаний получилось бесконечно много. Это связано с тем, что шнур рассматривается как непрерывная система, обладающая *бесконечным числом степеней свободы*. Собственное колебание с наинизшей частотой $\omega = \pi v/l$ называется *основным колебанием*, все остальные собственные колебания — *обертонами* или *гармониками*.

Все изложенное справедливо и для колебаний упругих стержней, как продольных, так и поперечных. Только здесь спектр возможных собственных колебаний богаче. Дело в том, что концы стержня могут быть либо *закреплены*, либо *свободны*. В первом случае не получается ничего нового по сравнению с натянутым шнуром. Во втором случае на концах стержня должны быть *пучности смещения*, а все остальное остается по-старому. Наконец, возможен случай, когда один конец стержня закреплен, а второй свободен. В этом случае основному колебанию соответствует длина волны, равная четверти длины стержня. Длины волн прочих собственных колебаний определяются формулой

$$l = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} n, \qquad (140.3)$$

где n — целое число. На рис. 353, *а* и 353, *б* приведены первые два собственных колебания для стержня с закрепленными и свободными концами, а на рис. 353, *в* — для стержня, один конец которого закреплен, а другой свободен.

Различные типы собственных колебаний в натянутом шнуре можно наблюдать, если конец M длинного резинового жгута закрепить в стене, а другой конец N взять в руку и привести в колебание (рис. 354). При надлежащей частоте колебаний руки и натяжении жгута удается возбудить основное колебание и несколько его первых гармоник. При этом рука не находится в узле M', а

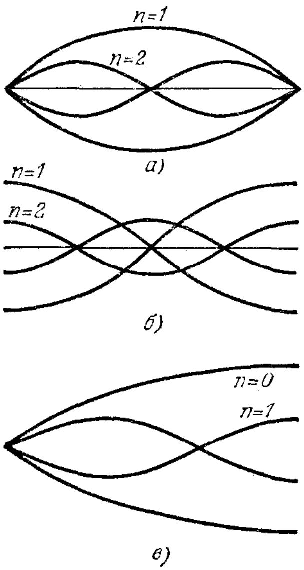

Рис. 353.

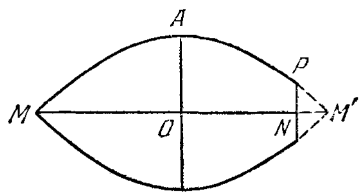

Рис. 354.

несколько смещена относительно него. Из рис. 354 видно, что отношение OA/NP тем больше, чем меньше это смещение. Это значит, что при неизменной амплитуде колебаний руки колебания в жгуте возбудятся тем сильнее, чем ближе точка приложения силы руки к узлу стоячей волны. Бесконечно малой силой можно возбудить колебания конечной амплитуды, если силу приложить бесконечно близко к узлу. Но в этом случае на длине шнура укладывается целое число полуволн, а частота приложенной силы совпадает с одной из собственных частот шнура. Поэтому указанное сильное возбуждение колебаний есть не что иное, как явление резонанса.

3. Все сказанное о стоячих волнах в шнуре и стержнях относится и к *электромагнитным волнам.* В этом случае, однако, волна характеризуется не одним вектором, а двумя взаимно перпендикулярными векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Пусть волна распространяется в положительном направлении оси X и представляется уравнениями

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx), \qquad H_z = H_0 \cos(\omega t - kx).$$

Волну, распространяющуюся в обратном направлении, можно получить отсюда, если изменить знаки у k и одного из векторов $\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{H}$, например магнитного. Это дает

$$E_y = E_0 \cos(\omega t + kx), \qquad H_z = -H_0 \cos(\omega t + kx).$$

В результате суперпозиции с предыдущей волной получится

$$E_x = 2E_0 \cos kx \cos \omega t, \qquad H_y = 2H_0 \sin kx \sin \omega t. \tag{140.4}$$

Это и есть *стоячая электромагнитная волна.* Она состоит из двух стоячих волн: *электрической* и *магнитной.* Мы видим, что колебания электрического поля сдвинуты по фазе относительно колебаний магнитного поля на $\pi/2$. Кроме того, пучности электрического поля совпадают с узлами магнитного поля, а узлы — с пучностями (рис. 355). Вектор Пойнтинга обращается в нуль в узлах (а следовательно, и в пучностях) как электрического, так и магнитного поля. Поэтому электромагнитная энергия не переходит ни через один из этих узлов. Ее движение ограничено колебаниями между узлом (пучностью) электрического поля и пучностью (узлом) магнитного поля.

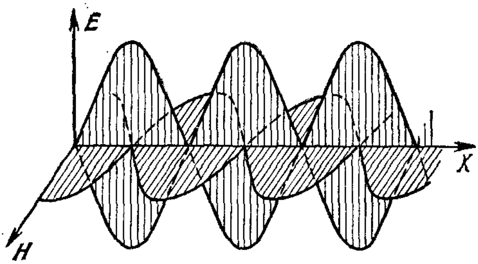

Рис. 355.

§ 141. Поле излучения диполя Герца

1. Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является точечный диполь, дипольный момент которого быстро меняется (колеблется) во времени. Такой диполь называется *диполем Герца,* по имени ученого, впервые рассчитавшего его электромагнитное поле. Задача об излучении диполя Герца в теории излучающих систем имеет особое значение. Дело в том, что всякую реальную излучающую систему — антенну, по которой течет переменный ток, — можно мысленно разложить на элементы тока, каждый из которых излучает, как диполь Герца. Путем суперпозиции электромагнитных полей таких элементов можно получить электромагнитное поле всей излучающей системы. Предпошлем решению задачи о поле излучения диполя Герца несколько вспомогательных математических формул.