

(минус во второй формуле потому, что отраженная волна идет назад). По первому правилу Кирхгофа

$$\mathcal{I}_e + \mathcal{I}_r = \mathcal{I} + \mathcal{I}_d.$$

Напряжение между концами мостика можно представить следующими тремя выражениями: $Z\mathcal{I}$, $V_e + V_r$, V_d . Приравнявая их и выражая напряжения через токи, получим два уравнения:

$$Z\mathcal{I} = W(\mathcal{I}_e - \mathcal{I}_r), \quad Z\mathcal{I} = W'\mathcal{I}_d.$$

Решая эти уравнения совместно с предыдущим, найдем

$$\frac{\mathcal{I}_r}{\mathcal{I}_e} = \frac{WW' + (W - W')Z}{\Delta},$$

$$\frac{\mathcal{I}_d}{\mathcal{I}_e} = \frac{2WZ}{\Delta}, \quad \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_e} = \frac{2WW'}{\Delta},$$

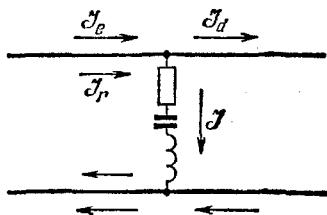


Рис. 371.

где

$$\Delta = WW' + (W + W')Z.$$

Если мостик поставлен на конец линии, то прошедшей волны не будет ($W' = \infty$). В этом случае

$$\mathcal{I}_r = \frac{W - Z}{W + Z} \mathcal{I}_e, \quad \mathcal{I} = \frac{2W}{W + Z} \mathcal{I}_e.$$

Отсюда легко получить амплитуды и фазы токов \mathcal{I}_e и \mathcal{I} для замкнутой линии ($Z = 0$) и для линии со свободными концами ($Z = \infty$). В обоих случаях отражение полное, но с разными фазами. Если сопротивление мостика чисто реактивное ($Z = iX$), то $|\mathcal{I}_e| = |\mathcal{I}_r|$: отражение также полное, наличие реактивного сопротивления сказывается только на положении узлов и пучностей. При $Z = W$ получаем $\mathcal{I}_r = 0$, т. е. волна совсем не отражается. Ток, подойдя к мостику по одному из проводов, проходит через мостик, попадает в другой провод и возвращается к началу линии.

§ 144. Свойства быстропеременных токов. Скин-эффект

1. В металлах из-за их высокой проводимости основную роль играет *ток проводимости*, по сравнению с которым током смещения можно полностью пренебречь. Благодаря этому проникновение магнитного поля в металл в математическом отношении вполне аналогично *процессу диффузии*.

Напомним сначала простейшие уравнения, которыми описывается процесс диффузии частиц вещества. Пусть частицы помещены в длинную прямолинейную трубу, направленную параллельно оси X (рис. 372). Поперечное сечение трубы для простоты будем считать равным единице. Концентрация частиц n является функцией координаты x и времени t . Если $j(x)$ — плотность диффузионного тока, то приращение в единицу времени числа частиц в слое, заштрихованном на рисунке, представится разностью $j(x) - j(x + dx) = -\frac{\partial j}{\partial x} dx$. То же приращение равно $\frac{\partial n}{\partial t} dx$. Таким

образом,

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\dot{n}, \quad j = -D \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (144.1)$$

где D — коэффициент диффузии. Выделим теперь в трубе столб вещества длиной l . Пусть в начальный момент времени на левом конце этого столба концентрация n отлична от нуля, а на правом обращается в нуль. Допустим также, что концентрация n равна нулю во всех точках трубы, расположенных правее выделенного столба. Плотность диффузионного тока будет $j \sim Dn/l$. Ту же величину можно представить выражением $j = nv$, где v — скорость, с которой вещество при диффузии распространяется вдоль трубы. Отсюда находим $v \sim D/l$. Время τ , за которое вещество диффундирует на расстояние l , будет $\tau \approx l/v \approx l^2/D$, и, следовательно,

$$l \sim \sqrt{D\tau}. \quad (144.2)$$

2. Перейдем теперь к задаче о проникновении электромагнитного поля в металл. В пренебрежении током смещения этот процесс описывается уравнениями

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}.$$

Пользуясь соотношениями $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, исключим из этих уравнений векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} . Получим

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{j} = -\frac{\lambda}{c} \dot{\mathbf{B}}.$$

Допустим, что все величины зависят только от одной координаты x , и для этого случая запишем полученные уравнения в координатной форме. Поступая так же, как при выводе формул (139.2), убедимся, что уравнения распадутся на две однотипные группы. В одну группу войдут уравнения, содержащие j_y и B_z , в другую — j_z и B_y . Поскольку эти две группы уравнений независимы, достаточно исследовать одну из них. Поэтому с самого начала можно предположить, что ток \mathbf{j} течет параллельно оси Y , а магнитное поле \mathbf{B} направлено вдоль оси Z . В таком случае

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\lambda}{c} \dot{B}, \quad j = -\frac{c^2}{4\pi\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{c} B \right). \quad (144.3)$$

Эти уравнения переходят в (144.1), если произвести замену $n \rightarrow \frac{\lambda}{c} B$

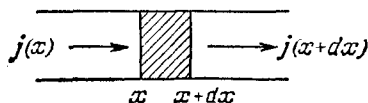


Рис. 372.

и положить

$$D = \frac{c^2}{4\pi\mu\lambda}. \quad (144.4)$$

Таким образом, распространение электромагнитного поля в металле описывается уравнениями диффузии, причем роль коэффициента диффузии играет величина (144.4).

Допустим теперь, что по плоской поверхности металла начинает течь переменный ток, периодически меняющийся во времени с периодом T . Через половину периода $T/2$ ток изменит направление на противоположное. За это время, как видно из формулы (144.2), магнитное поле, а с ним и электрический ток успеют проникнуть внутрь металла на глубину

$$l \sim \sqrt{D \frac{T}{2}} \sim c \sqrt{\frac{T}{8\pi\mu\lambda}} \sim \frac{c}{\sqrt{8\pi\mu\lambda\nu}}, \quad (144.5)$$

где $\nu = 1/T$ — частота переменного тока.

Таким образом, плотность тока в металле убывает с глубиной. Ток течет практически только в поверхностном слое металла, толщина которого порядка l . Это явление называется *скин-эффектом* (от английского слова «*skin*», что означает «*кожа*»), а величина l — *глубиной проникновения тока* (или магнитного поля) в металл. Глубина проникновения убывает с частотой, как $1/\sqrt{\nu}$. Возьмем в качестве примера медь. Для нее $\lambda = 5,4 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$ (величину μ принимаем равной единице). Тогда для «городского» тока $\nu = 50 \text{ Гц}$, и по формуле (144.5) находим $l \approx 0,7 \text{ см} \sim 1 \text{ см}$. При $\nu = 5000 \text{ Гц}$ $l \sim 0,1 \text{ см}$, при $\nu = 5 \cdot 10^5 \text{ Гц}$ $l \sim 0,01 \text{ см}$ и т. д. Таким образом, токи высокой частоты текут только в тонком поверхностном слое металла. В целях упрощения вычислений мы рассмотрим явление скин-эффекта для случая бесконечного металла, ограниченного плоскостью. Но скин-эффект, конечно, имеет место и в тех случаях, когда токи текут по проводам. Только в этом случае выражение для глубины проникновения будет отличаться от (144.5) множителем, зависящим от радиуса провода. Впрочем, этот множитель порядка единицы, а потому для понимания явления он никакой существенной роли не играет.

3. Дадим теперь качественное объяснение скин-эффекта. Рассмотрим цилиндрический провод, по которому течет переменный ток \mathcal{I} (рис. 373). Возьмем в меридиональном сечении провода прямоугольный контур $MM'N'N$, одна из сторон которого MM' проходит по оси провода. Пусть в рассматриваемый момент ток \mathcal{I} течет вверх. Магнитные силовые линии будут обвиваться вокруг оси провода, как указано на рис. 373. Допустим теперь, что ток \mathcal{I} , а с ним и магнитный поток Φ через контур $NMM'N'$ возрастают. Тогда возникает электрическое поле индукции $E_{\text{инд}}$, направленное на NN' вверх, а на MM' — вниз. Это поле будет усиливать ток

на периферии NN' и ослаблять на оси MM' . Если же ток \mathcal{I} убывает, то поле $E_{\text{инд}}$ изменит направление — теперь ток будет усиливаться на оси MM' и ослабляться на периферии NN' . Таким образом, каково бы ни было изменение тока \mathcal{I} , индукционный ток способствует этому изменению на периферии и препятствует на оси провода. В результате этого амплитуда установившихся колебаний тока на NN' становится больше, чем на оси MM' . Чем дальше от оси провода, тем больше амплитуда колебаний тока, так как магнитный поток Φ через контур $MM'N'N$ увеличивается с возрастанием расстояния MN . Такое перераспределение тока по сечению провода и есть скин-эффект.

Концентрация тока на поверхности провода приводит к тому, что сплошной провод начинает вести себя как полый с толщиной стенок, равной приблизительно глубине проникновения l . От этого сопротивление провода увеличивается, а индуктивность уменьшается. Поэтому для быстропеременных токов провода выгодно делать полыми, в виде труб, а не в виде сплошных проволок, так как внутренние приосевые части таких проволок в этих случаях бесполезны. Для более конкретного представления о влиянии скин-эффекта на сопротивление проводов приведем следующие данные. При частоте переменного тока $\nu = 50$ Гц сопротивление медного провода диаметром 2 см по сравнению с сопротивлением постоянному току увеличивается приблизительно на 3%, а для проволоки диаметром 2 мм — всего на 0,0003%. Для быстропеременных токов с частотой $\nu = 10^6$ Гц и провода с диаметром 2 мм сопротивление увеличивается почти в 7 раз. Если проволока не прямая, а намота, например, на катушку, то распределение тока по сечению проволоки становится несимметричным: плотность тока больше на стороне проволоки, обращенной внутрь катушки.

4. При быстрых электрических колебаниях магнитное поле меняется также очень быстро. Поэтому индукционные действия быстропеременных токов могут быть очень сильными. Их можно еще больше усилить, если воспользоваться явлением резонанса. На этом основано действие высокочастотного *резонансного трансформатора Тесла* (1856—1943). Это — воздушный трансформатор, первичная обмотка которого L_1 состоит из небольшого числа витков толстой проволоки и входит в состав колебательного контура, содержащего конденсатор (лейденскую банку) C и искровой промежуток F . Колебательный контур через дроссели D соединен с индуктором I (рис. 374). Вторичной обмоткой L_2 , которая помещается внутри первичной, служит спираль, состоящая из многих витков тонкой

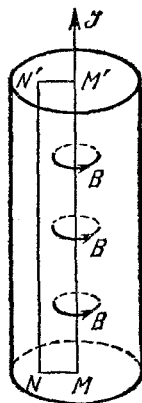


Рис. 373.

проводами, намотанной в один ряд на изолирующий цилиндр. Обе обмотки, а также отдельные витки вторичной обмотки должны быть хорошо изолированы друг от друга. Вторичная обмотка поэтому часто парафинируется и погружается в масло. Когда пробивается искровой промежуток F , в первичной обмотке возникают высокочастотные электрические колебания, а во вторичной — индукционные токи той же частоты. Катушка L_2 обладает собственными частотами, и поэтому колебания высокочастотных индукционных токов особенно сильны при совпадении одной из этих частот (обычно основной) с собственной частотой колебательного контура. В колебаниях с основной частотой посередине катушки возникает пучность тока, электрическое поле максимально на краях. Амплитуда колебаний напряжения между концами вторичной обмотки получается значительно больше амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе

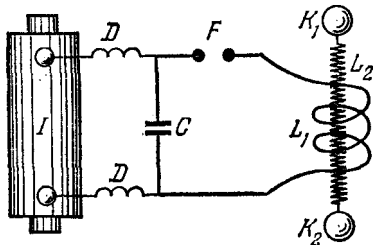


Рис. 374.

первичной обмотки. В этом можно убедиться с помощью выражения для электрической энергии конденсатора $W_e = \frac{1}{2} CV^2$, если принять во внимание, что электромагнитная энергия из первичной обмотки переходит во вторичную, и пренебречь при этом потерями энергии. Действительно, емкость вторичной обмотки много меньше емкости конденсатора первичной цепи. Поэтому напряжение на ней будет больше. Аналогично убеждаемся, что амплитуда тока во вторичной обмотке получится значительно меньше, чем в первичной ¹⁾.

Сильное электрическое поле вблизи полюсов K_1 и K_2 вторичной обмотки очень эффектно проявляется в темноте в виде энергичных разрядов в воздух с этих полюсов. При приближении к полюсам K_1 и K_2 заземленных проводников образуются длинные электрические искры. Тесла получал искры длиной до 2 метров, что соответствует напряжению более миллиона вольт. Искры можно извлекать и из других частей вторичной обмотки, но они слабее. Вблизи середины обмотки искры не возникают (узел напряжения). Газоразряд-

¹⁾ Аргументация подобного рода, хотя она и часто применяется, отличается неясностью. Вторичная обмотка характеризуется определенными емкостью и индуктивностью. Эти понятия применимы для постоянных и квазистационарных полей, тогда как в трансформаторе Тесла мы имеем дело с высокочастотными полями, для которых условие квазистационарности не выполняется. Неясным остается и смысл напряжения, поскольку в переменных полях интеграл $\int E dl$ зависит от пути интегрирования. Строгое (и понятное) рассмотрение должно основываться на системе уравнений Максвелла. Однако такового, по-видимому, не существует.

ные трубки светятся даже на значительном расстоянии от трансформатора Тесла.

Быстропеременные токи от трансформатора Тесла, несмотря на их высокое напряжение, не опасны для человека, а наоборот, ими даже пользуются теперь в лечебных целях. Человек может без боли выдерживать переменный ток с частотой 50 Гц до 0,1 А, тогда как при частоте 10^5 Гц можно довести силу тока до 0,8 А без заметного сокращения мускулов. (Эти пределы для разных людей разные.) Можно произвести следующий опыт. Кусок голой медной проволоки, служащий ручкой, обвивается два-три раза вокруг нарезного цоколя обыкновенной лампочки накаливания. Экспериментатор становится на изолирующую скамейку, удерживая лампочку за другой конец проволоки. Второй контакт лампочки он подносит к верхнему полюсу вторичной обмотки трансформатора Тесла, нижний полюс которой заземлен. Хотя цепь лампочки и не замкнута (экспериментатор стоит на изолирующей скамейке), лампочка ярко горит. Это происходит потому, что за половину периода лампочка и тело экспериментатора заряжаются электричеством определенного знака, а в следующую половину периода — таким же электричеством, но противоположного знака. Ввиду того, что колебания высокочастотные (порядка 10^6 Гц и выше), такая перезарядка происходит очень часто, и возникает переменный ток, достаточный для накала нити лампы. Через тело экспериментатора проходят при этом токи в несколько ампер. Такие токи, если бы они были постоянными, вызвали бы сильные физиологические действия и были бы очень опасны для жизни. Однако в описанном опыте токи высокочастотные. Экспериментатор не ощущает их, так как они протекают только в тонком поверхностном слое его кожи и не заходят вглубь, где расположена нервная система и жизненно важные органы человека. Можно даже подносить к полюсу вторичной обмотки палец руки. Искры, проскакивающие между полюсом и пальцем, никакого заметного болевого ощущения не вызывают.

ЗАДАЧА

В § 47 было указано, что для измерения электростатических полей на моделях в электролитической ванне применяется переменное напряжение. Выяснить пределы применимости такого метода.

Решение. Прежде всего должно соблюдаться условие квазистационарности. При наличии проводимости жидкости оно означает, что размеры ванны L должны быть малы не только по сравнению с длиной электромагнитной волны в электролите λ , но и по сравнению с глубиной l проникновения электромагнитного поля в электролит из-за скин-эффекта. (Длина волны обозначается через λ , λ применяется для обозначения удельной проводимости электролита.) Кроме того, должно быть выполнено условие применимости метода сечений. При обосновании этого метода используется то обстоятельство, что в электролите на его поверхности должна обращаться в нуль нормальная составляющая электрического поля, что в случае переменных полей может соблюдаться только приближенно.

Пусть электролит граничит с воздухом. Тогда на границе раздела должны соблюдаться условия

$$-D_n + D_{0n} = 4\pi\sigma, \quad j_n = \frac{\partial\sigma}{\partial t},$$

где D и D_0 — векторы индукции в электролите и в воздухе, σ — поверхностная плотность зарядов, j — плотность тока в электролите (нормаль проведена от электролита к воздуху). Введем электрические поля E и E_0 и предположим, что они $\sim e^{i\omega t}$. Тогда

$$E_{0n} - \varepsilon E_n = 4\pi\sigma, \quad \lambda E_n = i\omega\sigma,$$

откуда

$$E_n = \frac{E_{0n}}{\varepsilon - i \frac{4\pi\lambda}{\omega}}, \quad D_n = \frac{E_{0n}}{1 - i \frac{4\pi\lambda}{\omega\varepsilon}}.$$

Скачок нормальной составляющей вектора D обусловлен поверхностными зарядами на границе электролита. Эти заряды ослабляют поле электродов внутри и усиливают вне электролита. При выполнении условия $|D_n| \ll E_{0n}$ поверхностные заряды почти полностью компенсируют нормальную составляющую поля электродов в электролите на его границе. Для полной компенсации надо было бы очень мало изменить поверхностную плотность σ . Тогда мы получили бы точно $E_n = 0$, и для такого искаженного поля условие применимости метода сечений было бы выполнено. Но, очевидно, малое изменение плотности σ мало изменит и поле внутри электролита. Поэтому можно считать, что при соблюдении неравенства

$$\varepsilon \ll \frac{4\pi\lambda}{\omega}$$

нормальная составляющая E_n на поверхности электролита практически равна нулю. Это неравенство и есть условие применимости метода сечений. Используя формулу (144.5), а также выражение $\Lambda = 2\pi c / (\omega \sqrt{\varepsilon})$, неравенство можно записать в виде $l \ll \Lambda$. Окончательно условие применимости метода электролитической ванны можно записать в виде

$$L \ll l \ll \Lambda. \quad (144.6)$$

Подставляя выражения для l и Λ , получаем

$$v \ll \frac{c}{L\sqrt{\varepsilon}}, \quad (144.7)$$

$$\frac{v\varepsilon}{8\pi} \ll \lambda \ll \frac{c^2}{8\pi v L^2}. \quad (144.8)$$

При $L = 1$ м, $\varepsilon = 81$ из (144.7) получаем $v \ll 3 \cdot 10^7$ Гц независимо от электропроводности электролита. Для предельной частоты $3 \cdot 10^7$ Гц условие (144.8) дает

$$9,7 \cdot 10^7 \ll \lambda \ll 12 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Отсюда видно, что метод электролитической ванны (при $L \sim 1$ м) уже неприменим на частотах порядка 10^7 Гц. Для обычно применяемых частот $v \sim 10^3$ Гц

$$3 \cdot 10^3 \ll \lambda \ll 3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1},$$

или

$$10^{-9} \ll \lambda \ll 1 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}.$$