Тем самым изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению системы взаимодействующих материальных точек. Естественно поэтому начать изучение классической механики с механики одной материальной точки, а затем перейти к изучению системы материальных точек.

Выберем какую-либо произвольную систему отсчета и будем относить к ней движение материальной точки. Движение точки будет описано полностью, если будет известно ее положение в любой момент времени относительно выбранной системы отсчета. Положение точки мы условимся характеризовать ее прямоугольными координатами x, y, z, являющимися проекциями ее радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ на координатные оси. Полное описание движения сводится поэтому к нахождению трех координат x, y, z как функций времени t:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \tag{2.1}$$

или к нахождению одной векторной функции

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \tag{2.2}$$

Однако для формулировки основных законов механики, с помощью которых теоретически могут быть найдены рассматриваемые функции, существенны два новых понятия — понятие *скорости* и в особенности понятие *ускорения*. К установлению этих понятий мы и перейдем.

§ 3. Скорость и ускорение при прямолинейном движении. Угловая скорость и угловое ускорение

1. Рассмотрим сначала частный случай, когда материальная точка движется вдоль прямой линии. Примем эту прямую за координатную ось X, поместив начало координат O в какой-то произвольной точке ее (рис. 5). Положение материальной точки в рассматриваемом случае определяется одной координатой:

$$x = x(t). \tag{3.1}$$

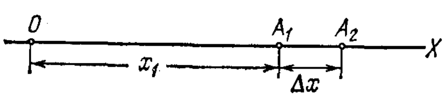

Рис. 5.

Пусть в какой-то фиксированный момент времени t материальная точка находится в положении A_1. В этот момент ее координата равна $x_1 = x(t)$. В более поздний момент времени материальная точка переместится в положение A_2 с координатой $x_2 = x(t + \Delta t)$. За время Δt материальная точка проходит путь $\Delta x = x_2 - x_1 = x(t + \Delta t) - x(t)$. Он считается положительным, если перемещение совершается вправо, и отрицательным, если оно происходит влево. Отношение пройденного пути Δx к промежутку времени Δt называется *средней скоростью материальной* *точки за время* Δt или, точнее, *за время между* t *и* $t+\Delta t$. Таким образом, по определению, средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}. \tag{3.2}$$

Такое определение средней скорости имеет смысл для любых значений Δt. Надо исключить только значение $\Delta t=0$, так как в этом случае для средней скорости мы получили бы выражение $\frac{0}{0}$, которое само по себе не имеет никакого смысла. Однако ничто не мешает брать промежуток времени Δt как угодно малым, но отличным от нуля. Вообще говоря, средняя скорость зависит не только от t, но и от Δt. Будем теперь, оставляя момент времени t неизменным, брать промежуток времени Δt все меньше и меньше, устремляя его к нулю. Тогда будет стремиться к нулю и проходимый путь Δx. Отношение же $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при этом, как показывает опыт, будет стремиться к вполне определенному пределу, который может зависеть только от t, но уже не будет зависеть от Δt. Этот предел называется *истинной* или *мгновенной скоростью материальной точки в момент времени* t:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

Пределы типа (3.3) встречаются в самых разнообразных вопросах математики и ее приложениях. В математике предел, определяемый формулой (3.3), называется *производной* функции $x(t)$ по аргументу t. Производная по времени обозначается символом $\dot{x}(t)$ или $\frac{dx}{dt}$. Таким образом, по определению

$$\dot{x}\equiv\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3.4}$$

Понятие производной является основным понятием *дифференциального исчисления*. Используя это понятие, можно сказать, что *истинная* или *мгновенная скорость* v есть производная координаты x по времени, или производная пройденного пути s по времени:

$$v=\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{ds}{dt}. \tag{3.5}$$

Скорость материальной точки, вообще говоря, является функцией времени: $v=v(t)$. Производная скорости по времени называется *ускорением материальной точки*. Ускорение мы обозначаем через a. Таким образом, по определению ускорения

$$a=\frac{dv}{dt}=\dot{v}(t), \tag{3.6}$$

или

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}. \tag{3.7}$$

Производная (3.6) называется также *второй производной* координаты x по времени и обозначается символами

$$a = \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{3.8}$$

В существовании первой и второй производных координаты по времени в механике, как и во всех аналогичных вопросах физики, мы убеждаемся не путем логических рассуждений, а опытным путем.

2. Рассмотрим простейшие примеры.

Пример 1. $x = \text{const}$, т. е. координата x остается постоянной во времени. В этом случае материальная точка неподвижна, приращение координаты Δx равно нулю. Равны нулю также средняя и истинная скорости точки: $v = \dot{x} = 0$. Вообще, производная всякой постоянной величины равна нулю.

Пример 2. $x = Bt + C$, где B и C — постоянные коэффициенты. В этом случае говорят, что координата x является *линейной функцией* времени t. Очевидно,

$$x + \Delta x = B(t + \Delta t) + C = (Bt + C) + B\,\Delta t, \qquad \Delta x = B\,\Delta t, \qquad v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = B.$$

Средняя скорость постоянна и равна B. Поэтому истинная скорость также постоянна и равна средней скорости:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_{\text{ср}} = B.$$

Движение с постоянной скоростью называется *равномерным*. Обозначим посредством x_0 значение координаты x в начальный момент времени $t = 0$. Величина x_0 называется *начальной координатой* и, очевидно, равна $x_0 = C$. Пройденный путь s определяется приращением координаты: $s = x - x_0 = Bt$, или

$$s = vt.$$

Пример 3. $x = At^2 + Bt + C$, где A, B и C — постоянные коэффициенты. В этом случае говорят, что координата x является *квадратичной функцией* времени t. Очевидно,

$$x + \Delta x = A(t + \Delta t)^2 + B(t + \Delta t) + C = (At^2 + Bt + C) + (2At + B)\,\Delta t + A(\Delta t)^2,$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = (2At + B) + A\,\Delta t.$$

Здесь $v_{\text{ср}}$ зависит не только от t, но и от Δt. В пределе, когда $\Delta t \to 0$, член $A\Delta t$ обращается в нуль, и мы получаем следующее выражение для истинной скорости:

$$v = 2At + B.$$

Истинная скорость является линейной функцией времени t, а потому, дифференцируя ее, получаем постоянное значение для ускорения:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2A.$$

Движение с постоянным ускорением называется *равноускоренным*. Постоянная A равна половине ускорения: $A = a/2$. Выясним теперь физический смысл постоянных B и C. При $t = 0$ наши формулы дают $v = B$. Скорость в момент времени $t = 0$ называется *начальной скоростью* и обозначается посредством v_0. Мы видим, что постоянная B равна начальной скорости: $B = v_0$. Аналогично доказывается, что постоянная C есть начальная координата движущейся точки: $C = x_0$. С введением этих величин можно написать

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0, \qquad v = at + v_0.$$

Пройденный путь равен $s = x - x_0$, т. е.

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t.$$

Примерами равноускоренного движения могут служить свободное падение тел и скатывание тела по наклонной плоскости без трения.

3. По аналогии с *линейной* скоростью и ускорением вводятся *угловая скорость* и *угловое ускорение*. Эти понятия относятся к случаю движения материальной точки по окружности. Положение точки M на окружности можно задать углом α, который образует радиус-вектор OM с каким-либо неизменным направлением OX (рис. 6). Производная этого угла по времени

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

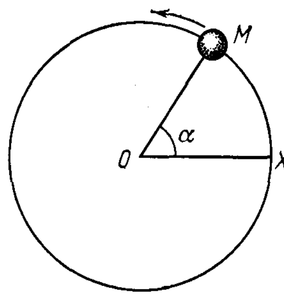

Рис. 6.

называется *угловой скоростью*. Вращение называется *равномерным*, если угловая скорость ω постоянна. В этом случае $\alpha = \omega t + \mathrm{const}$. При равномерном вращении величину ω называют также *угловой частотой вращения*. Величина $\nu = \omega/(2\pi)$ дает число оборотов в единицу времени и называется *частотой обращения*. Величина $T = 1/\nu$ есть продолжительность одного обращения и называется *периодом вращения*.

Первая производная угловой скорости ω или вторая производная угла α по времени называется *угловым ускорением*:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Если s означает длину дуги окружности XM, то ее производные $v = \frac{ds}{dt}$ и $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$ дают линейную скорость и линейное ускорение при движении точки по окружности. Если r — радиус окружности, то $s = r\alpha$. Дифференцируя это соотношение по времени, находим

$$v = \omega r, \qquad a = \dot{\omega} r.$$

§ 4. Скорость и ускорение при криволинейном движении

1. Понятия скорости и ускорения естественным образом обобщаются на случай движения материальной точки по *криволинейной траектории*. Положение движущейся точки на траектории мы будем задавать радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, проведенным в эту точку из