этих величин можно написать

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0,\qquad v=at+v_0.$$

Пройденный путь равен $s=x-x_0$, т. е.

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t.$$

Примерами равноускоренного движения могут служить свободное падение тел и скатывание тела по наклонной плоскости без трения.

3. По аналогии с *линейной* скоростью и ускорением вводятся *угловая скорость* и *угловое ускорение*. Эти понятия относятся к случаю движения материальной точки по окружности. Положение точки M на окружности можно задать углом α, который образует радиус-вектор OM с каким-либо неизменным направлением OX (рис. 6). Производная этого угла по времени

$$\omega=\frac{d\alpha}{dt}$$

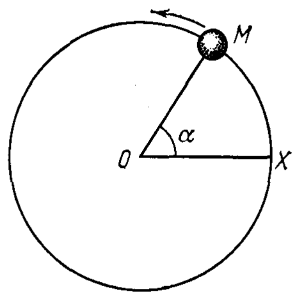

Рис. 6.

называется *угловой скоростью*. Вращение называется *равномерным,* если угловая скорость ω постоянна. В этом случае $\alpha=\omega t+\text{const}$. При равномерном вращении величину ω называют также *угловой частотой вращения*. Величина $\nu=\omega/(2\pi)$ дает число оборотов в единицу времени и называется *частотой обращения*. Величина $T=1/\nu$ есть продолжительность одного обращения и называется *периодом вращения*.

Первая производная угловой скорости ω или вторая производная угла α по времени называется *угловым ускорением:*

$$\dot\omega=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Если s означает длину дуги окружности XM, то ее производные $v=\frac{ds}{dt}$ и $a=\frac{d^2s}{dt^2}$ дают линейную скорость и линейное ускорение при движении точки по окружности. Если r — радиус окружности, то $s=r\alpha$. Дифференцируя это соотношение по времени, находим

$$v=\omega r,\qquad a=\dot\omega r.$$

§ 4. Скорость и ускорение при криволинейном движении

1. Понятия скорости и ускорения естественным образом обобщаются на случай движения материальной точки по *криволинейной траектории*. Положение движущейся точки на траектории мы будем задавать радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, проведенным в эту точку из какой-либо неподвижной точки O, условно принимаемой за начало координат (рис. 7). Пусть в момент времени t материальная точка находится в положении M с радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Спустя короткое время Δt, она переместится в положение M_1 с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t+\Delta t)$. Радиус-вектор материальной точки получит приращение, определяемое геометрической разностью $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}$. Величина

$$\boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{4.1}$$

называется *средней скоростью движения за время* Δt или, точнее, *за время между* t *и* $t+\Delta t$. Она является величиной *векторной*, так как получается делением вектора $\Delta\boldsymbol{r}$ на скаляр Δt. Направление средней скорости $\boldsymbol{v}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением хорды MM_1, т. е. с $\Delta\boldsymbol{r}$.

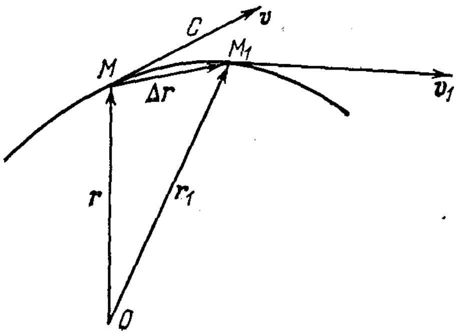

Рис. 7.

Предел средней скорости при $\Delta t \to 0$, т. е. производная радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ по времени

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{4.2}$$

называется *истинной* или *мгновенной скоростью материальной точки. Истинная скорость есть вектор, направленный по касательной к траектории движущейся точки.*

Совершенно аналогично определяется ускорение при криволинейном движении. *Ускорением* $\boldsymbol{a}$ *называется вектор, равный первой производной вектора скорости* $\boldsymbol{v}$ *или второй производной радиуса-вектора* $\boldsymbol{r}$ *по времени:*

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}, \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{4.4}$$

2. Отметим следующую формальную аналогию между скоростью и ускорением. Из произвольной неподвижной точки O_1 будем откладывать вектор скорости $\boldsymbol{v}$ движущейся точки во всевозможные моменты времени (рис. 8). Конец вектора $\boldsymbol{v}$ назовем *скоростной точкой.* Геометрическое место скоростных точек есть кривая, называемая *годографом скорости.* Когда материальная точка описывает траекторию, соответствующая ей скоростная точка движется по годографу. Рис. 8 отличается от рис. 7 только обозначениями. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ заменен на вектор скорости $\boldsymbol{v}$, материальная точка — на скоростную точку, траектория — на годограф. Математические операции над вектором $\boldsymbol{r}$ при нахождении скорости и над вектором $\boldsymbol{v}$ при нахождении ускорения совершенно тождественны. Для математики безразлично, какой физический смысл имеют величины, над которыми выполняются математические операции. Не имеет значения также, какими символами эти величины обозначены. Для нахождения скорости $\boldsymbol{v}$ надо дифференцировать радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, для нахождения ускорения надо дифференцировать вектор скорости $\boldsymbol{v}$. Скорость $\boldsymbol{v}$ направлена по касательной к траектории. Поэтому *ускорение* $\boldsymbol{a}$ *будет направлено по касательной к годографу скорости*. Можно сказать, что *ускорение есть скорость движения скоростной точки по годографу*. Следовательно, *все соотношения и теоремы, полученные для скорости, остаются справедливыми и для ускорения, если в них произвести замену величин и терминов согласно следующей таблице:*

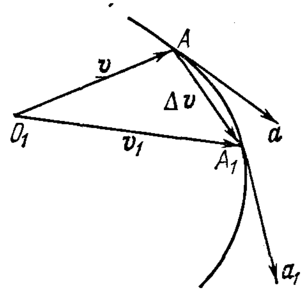

Рис. 8.

Материальная точка	⟶	Скоростная точка
Радиус-вектор	⟶	Вектор скорости
Траектория	⟶	Годограф
Скорость	⟶	Ускорение

3. В качестве простейшего примера найдем ускорение точки, равномерно вращающейся по окружности радиуса r (рис. 9, *а*). Скорость $\boldsymbol{v}$ направлена по касательной к окружности, ее величина определяется выражением

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}. \tag{4.5}$$

Годографом будет окружность радиуса v (рис. 9, *б*). Когда материальная точка M вращается по окружности радиуса r, соответствующая ей скоростная точка A вращается в том же направлении по окружности радиуса v, описывая эту окружность за то же время T. Положениям материальной точки на траектории M_1, M_2, M_3, M_4 соответствуют на годографе положения скоростной точки A_1, A_2, A_3, A_4. Ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено по касательной к окружности — годографу и притом, как видно из рисунка, к центру O траектории вращающейся точки M. По аналогии с формулой (4.5) для величины ускорения можно написать

$$a = \omega v = \frac{2\pi v}{T} = \frac{v^2}{r}. \tag{4.6}$$

Это — известная формула для *центростремительного ускорения*. Ее можно записать в векторной форме

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}. \qquad (4.7)$$

Знак минус указывает на то, что направления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r}$ взаимно противоположны, т. е. ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено к центру круговой траектории, по которой вращается материальная точка. Можно также написать для любого положения движущейся точки

$$\boldsymbol{a} = \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n}, \qquad (4.8)$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к круговой траектории движущейся точки, направленный к центру O (см. рис. 9, *а*).

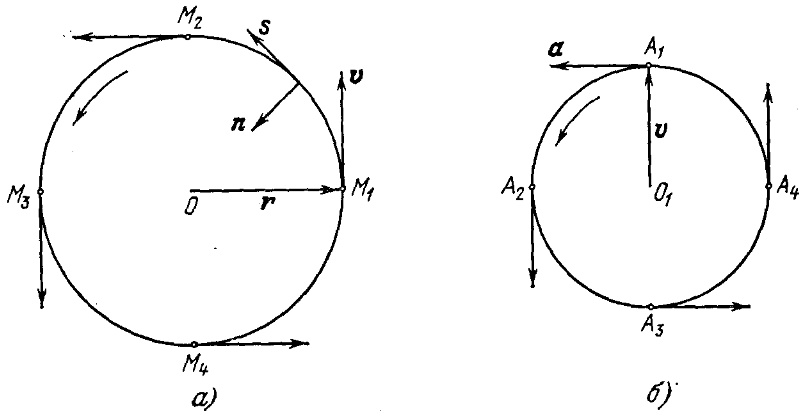

Рис. 9.

Имея в виду дальнейшие обобщения, представим вектор скорости в виде $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{s}$, где $\boldsymbol{s}$ — единичный вектор касательной к окружности. Первый множитель v дает численную величину скорости, второй множитель $\boldsymbol{s}$ указывает ее направление. При равномерном вращении абсолютное значение скорости v остается неизменным, меняется только направление скорости, т. е. единичный вектор $\boldsymbol{s}$. Дифференцированию подлежит только этот вектор, а потому $\boldsymbol{a} = v\,\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}$. Сравнивая это выражение с (4.8), получим

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \frac{v}{r}\boldsymbol{n}. \qquad (4.9)$$

Обозначим ds длину пути, проходимого материальной точкой за время dt при ее вращении по окружности. Эта положительная величина равна $ds = v\,dt$. Поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{ds} = \frac{1}{r}\boldsymbol{n}. \qquad (4.10)$$

В этом виде формула не содержит никаких кинематических величин. В нее входят только геометрические величины, характеризующие окружность. Поэтому она может быть получеа нчисто геометрически без привлечения кинематических понятий. Она определяет производную единичного вектора касательной $\boldsymbol{s}$ по длине дуги окружности. Взаимная перпендикулярность векторов $\boldsymbol{s}$ и $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ $\left(\text{или } \frac{d\boldsymbol{s}}{dt}\right)$ объясняется тем, что длина вектора $\boldsymbol{s}$ постоянна, меняется только направление этого вектора. Треугольник, составленный из векторов $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}+\Delta\boldsymbol{s}$ и $\Delta\boldsymbol{s}$ (рис. 10), — равнобедренный. При стремлении элемента дуги Δs к нулю стремится к нулю угол α при его вершине. Поэтому направление вектора $\frac{\Delta\boldsymbol{s}}{\Delta s}$ в пределе оказывается перпендикулярным к вектору $\boldsymbol{s}$. Отмеченное свойство, разумеется, не является специфическим свойством единичного вектора $\boldsymbol{s}$. Производная любого вектора $\boldsymbol{A}$ постоянной длины по любому скалярному аргументу есть вектор, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{A}$.

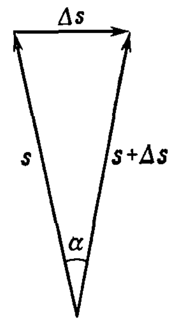

Рис. 10.

4. Формула (4.10) допускает обобщение на случай произвольной гладкой кривой. Обозначим по-прежнему посредством $\boldsymbol{s}$ единичный вектор касательной к кривой, а посредством ds — длину элемента дуги этой кривой. Производная $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ есть вектор, направленный нормально к кривой в сторону ее вогнутости. Эту производную можно поэтому представить в виде (4.10), рассматривая величину $1/r$ как коэффициент пропорциональности между векторами $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ и $\boldsymbol{n}$. Фактическое содержание этой формулы сводится к тому, что производная $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ есть вектор, нормальный к кривой. В остальном на нее надо смотреть как на определение двух новых понятий: величины $1/r$ и единичного вектора $\boldsymbol{n}$. Величина $1/r$ называется *кривизной кривой*, r — *радиусом кривизны*, а $\boldsymbol{n}$ — *единичным вектором главной нормали* к кривой. При этом кривизна $1/r$ считается существенно положительной, а потому единичный вектор $\boldsymbol{n}$ всегда направлен в сторону вогнутости кривой. Оправданием такой терминологии служит интуитивное представление, что при рассмотрении кривизны малый элемент кривой приближенно можно рассматривать как дугу окружности. Это приближение тем точнее, чем меньше длина дуги Δs. В случае окружности кривизна $1/r$ постоянна на протяжении всей кривой. В общем случае произвольной гладкой кривой кривизна непрерывно меняется от точки к точке. Непрерывно меняется и направление единичного вектора главной нормали $\boldsymbol{n}$. Кинематическая формула (4.9) также справедлива для

движения вдоль произвольной кривой и притом независимо от того, постоянна величина v или меняется с течением времени. Действительно, формула (4.10) получается из формулы (4.9) с помощью соотношения $ds = vdt$.

Все геометрические кривые разделяются на плоские и кривые двоякой кривизны. *Плоской кривой* называется кривая, все точки которой лежат в одной плоскости. Примерами плоских кривых являются окружность, эллипс, гипербола, парабола, синусоида и пр. *Кривыми двоякой кривизны* называются такие кривые, которые не могут быть уложены в одной плоскости. Примером подобной кривой может служить винтовая линия — спираль. Плоскость, в которой лежат касательная и главная нормаль к кривой, называется *соприкасающейся плоскостью*. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью, в которой лежит кривая. К понятию соприкасающейся плоскости приводит следующее интуитивное представление. Произвольную конечную дугу кривой двоякой кривизны, разумеется, нельзя уложить в плоскость. Но чем меньше дуга кривой, тем точнее она приближается к элементу плоской кривой, тем с меньшей ошибкой ее можно уложить в плоскости. Такая плоскость приближенно и воспроизводит соприкасающуюся плоскость. Это интуитивное представление можно превратить в точное определение с помощью предельного перехода. Пусть M (см. рис. 7) — произвольная точка на кривой. Проведем в ней касательную MC и хорду MM_1. Этими двумя прямыми, вообще говоря, определится некоторая плоскость CMM_1. Будем неограниченно приближать точку M_1 к точке M. Тогда указанная плоскость, вообще говоря, будет стремиться к некоторому определенному предельному положению. Это предельное положение и называется соприкасающейся плоскостью. Перпендикуляр к соприкасающейся плоскости в точке M называется *бинормалью к кривой*.

5. При равномерном вращении точки по окружности ускорение направлено к ее центру, т. е. перпендикулярно к траектории. Ускорение перпендикулярно к траектории и при движении по любой кривой, если только скорость движущейся точки не меняется по величине. Не так будет, когда меняется также и величина скорости. Чтобы разобрать этот вопрос, представим вектор скорости в виде $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{s}$. Применяя к этому выражению правило дифференцирования произведения, получим

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{s}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} + v\frac{d\boldsymbol{s}}{dt},$$

или ввиду формулы (4.9)

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} + \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n}. \qquad (4.11)$$

Отсюда следует, что *вектор ускорения* $\boldsymbol{a}$ *лежит в плоскости векторов* $\boldsymbol{s}$ *и* $\boldsymbol{n}$, *т. е. в соприкасающейся плоскости*; *вектор* $\boldsymbol{a}$ *не имеет составляющей по бинормали к траектории.* В общем случае ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено под углом к траектории. Первое слагаемое в формуле (4.11)

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} \tag{4.12}$$

есть вектор, направленный по касательной к траектории. Этот вектор называется *касательным* или *тангенциальным ускорением.* Второе слагаемое

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n} \tag{4.13}$$

есть вектор, направленный вдоль главной нормали в сторону вогнутости траектории. Он называется *нормальным ускорением.* Таким образом, в общем случае *ускорение* $\boldsymbol{a}$ *можно представить в виде геометрической суммы тангенциального и нормального ускорений:*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n. \tag{4.14}$$

Тангенциальное ускорение меняет скорость только по величине, нормальное ускорение меняет ее только по направлению.

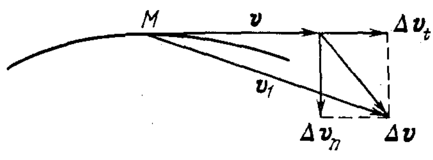

Рис. 11.

Рис. 11 поясняет разложение полного ускорения на тангенциальное и нормальное. Пусть $\boldsymbol{v}$ — скорость материальной точки в момент времени t, когда она находилась в положении M. Обозначим посредством $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}$ скорость той же точки в момент $t + \Delta t$, когда она переместилась в положение M_1 (не обозначенное на рисунке). Отложим оба вектора $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_1$ из одной и той же точки M и разложим приращение $\Delta\boldsymbol{v}$ скорости на две составляющие: составляющую $\Delta\boldsymbol{v}_t$ вдоль вектора $\boldsymbol{v}$ и составляющую $\Delta\boldsymbol{v}_n$, перпендикулярную к этому вектору. При уменьшении Δt оба отношения $\frac{\Delta\boldsymbol{v}_t}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t}$ будут стремиться к определенным пределам. Первый из них есть тангенциальное, а второй — нормальное ускорения.

При вычислении скорости точки бесконечно малую дугу траектории можно аппроксимировать бесконечно коротким прямолинейным отрезком, направление которого совпадает с направлением касательной к траектории. При определении ускорения такая аппроксимация уже не годится. Однако, как видно из рассуждений настоящего параграфа, при вычислении ускорения бесконечно малую дугу траектории можно аппроксимировать дугой окружности, плоскость которой совпадает с соприкасающейся плоскостью, а радиус равен радиусу кривизны траектории в рассматриваемой точке. Но и такая аппроксимация оказалась бы недостаточной, если бы потребовалось вычислить производные радиуса-вектора более высокого порядка: $\dddot{\boldsymbol{r}}$, $\ddddot{\boldsymbol{r}}$ и т. д.

ЗАДАЧИ

1. Шарик, которому сообщена горизонтальная скорость v, падает на горизонтальную плиту с высоты h. При каждом ударе о плиту теряется часть скорости (отношение вертикальной составляющей скорости после удара к ее значению до удара постоянно и равно α).

Определить, на каком расстоянии x от места бросания отскоки шарика прекратятся. Считать, что трение отсутствует, так что горизонтальная составляющая скорости шарика v не меняется.

Ответ. $x = v\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$.

2. Точка движется в плоскости, причем ее прямоугольные координаты определяются уравнениями

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = B\sin\omega t, \tag{4.15}$$

где A, B, ω — постоянные. По какой траектории движется точка? Вычислить ее ускорение.

Решение. Исключая время t из уравнений (4.15), находим

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Точка движется по эллипсу. Ее радиус-вектор $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, а ускорение $\boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j}$. Дифференцирование дает

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega A\sin\omega t, & \ddot{x} &= -\omega^2 A\cos\omega t = -\omega^2 x, \\ \dot{y} &= \omega B\cos\omega t, & \ddot{y} &= -\omega^2 B\sin\omega t = -\omega^2 y. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -\omega^2\boldsymbol{r}. \tag{4.16}$$

Ускорение направлено к центру эллипса и пропорционально r. В частном случае $A = B$ — эллипс вырождается в круг, а формула (4.16) переходит в известную формулу для центростремительного ускорения при равномерном вращении по кругу.

3. Установить связь между звездными и средними солнечными сутками. *Звездный год*, т. е. промежуток времени, в течение которого Солнце совершает свой видимый путь по небесной сфере относительно звезд, составляет 365,2564 средних солнечных суток. (Звездный год следует отличать от *тропического года*, который соответствует периоду смены времен года и составляет 365,2422 средних солнечных суток).

Решение. Пусть в положении *1* (рис. 12) плоскость земного меридиана AB проходит через центр Солнца C и какую-либо (бесконечно удаленную) звезду D. Когда Земля в своем орбитальном движении перейдет в положение *2*, плоскость того же меридиана повернется относительно направления на звезду на угол α, а относительно направления на центр Солнца — на угол β. Углы α и β могут превышать 2π, но они всегда связаны соотношением $\alpha = \beta + \gamma$, где γ — угол между направлениями на центр Солнца в положениях *1* и *2*. Спустя звездный год, когда Земля вернется в исходную плоскость $1CD$, угол γ примет значение 2π, а потому в этом положении $\alpha = \beta + 2\pi$. За это время пройдет $N_{зв} = \alpha/(2\pi)$ звездных и $N_{сол} = \beta/2\pi$ средних солнечных суток. Поэтому $N_{зв} = N_{сол} + 1$. Если $T_{зв}$ —

продолжительность звездных, а $T_{\text{сол}}$ — средних солнечных суток, то очевидно, что $N_{\text{зв}} \cdot T_{\text{зв}} = N_{\text{сол}} \cdot T_{\text{сол}}$, так как оба эти выражения представляют одно и то же время — звездный год. Используя соотношение $N_{\text{зв}} = N_{\text{сол}} + 1$, отсюда находим

$$T_{\text{зв}} = \frac{N_{\text{сол}}}{N_{\text{сол}}+1} T_{\text{сол}}, \qquad T_{\text{сол}} - T_{\text{зв}} = \frac{1}{N_{\text{сол}}+1} T_{\text{сол}}.$$

Подставив сюда $T_{\text{сол}} = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ с, $N_{\text{сол}} = 365{,}2564$, получим

$$T_{\text{сол}} - T_{\text{зв}} = 235{,}9003 \text{ с} \approx 236 \text{ с}, \qquad T_{\text{зв}} \approx 86\,164 \text{ с}.$$

Заметим, что при решении мы не вводили предположения, что Земля по своей орбите движется равномерно.

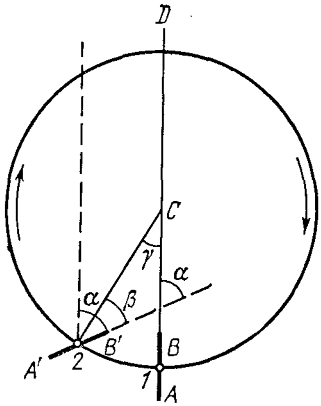

Рис. 12.

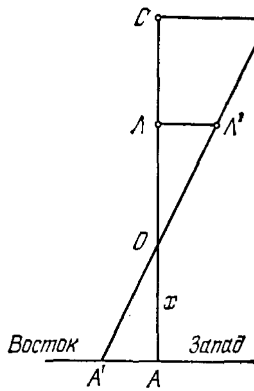

Рис. 13.

4. Определить скорость, с которой движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения.

Р е ш е н и е. Для простоты примем, что затмение наблюдается на экваторе и что земная ось перпендикулярна к плоскостям солнечной и лунной орбит. Скорость света будем считать бесконечно большой по сравнению со всеми остальными скоростями, входящими в задачу. Пусть в рассматриваемый момент времени прямая Солнце — Луна перпендикулярна к земной поверхности в точке наблюдения A (рис. 13). Поверхность Земли в окрестности той же точки можно считать плоской. При решении выберем сначала систему отсчета, в которой Земля покоится. Пусть $\omega_{\text{С}}$ и $\omega_{\text{Л}}$ — угловые скорости вращения Солнца и Луны вокруг центра Земли, $R_{\text{С}}$ и $R_{\text{Л}}$ — расстояния их от того же центра, r — радиус Земли. За секунду Солнце и Луна переместятся с востока на запад на расстояния $CC' = \omega_{\text{С}} R_{\text{С}}$ и $ЛЛ' = \omega_{\text{Л}} R_{\text{Л}}$. Соединив новые положения Солнца и Луны прямой линией, найдем, что за секунду граница лунной тени переместится по земной поверхности с запада на восток на расстояние $v = AA'$. Это расстояние и есть скорость движения тени Луны. Из рис. 13 видно, что

$$\frac{v}{\omega_{\text{С}} R_{\text{С}}} = \frac{x}{OC} \approx \frac{x}{R_{\text{С}}},$$

так как расстояние до Луны пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием до Солнца, и можно принять $OC = R_{\text{С}}$. Таким образом, $v = \omega_{\text{С}} x$. Для нахождения

x составляем пропорцию

$$\frac{\omega_С R_С}{\omega_Л R_Л} = \frac{CC'}{ЛЛ'} = \frac{OC}{OЛ}.$$

Полагая в ней $OC = R_С$, $OЛ = R_Л - x - r$, получим уравнение для нахождения x. Оно дает

$$x = \frac{\omega_С - \omega_Л}{\omega_С} R_Л - r.$$

Следовательно, скорость движения лунной тени с запада на восток будет

$$v = \omega_С x = (\omega_С - \omega_Л) R_Л - \omega_С r.$$

Здесь $\omega_С = \dfrac{2\pi}{T_{сут}}$, $\omega_С - \omega_Л = \dfrac{2\pi}{T_{мес}}$, где $T_{сут} = 86400$ с — продолжительность солнечных суток, а $T_{мес} = 29{,}6\ T_{сут}$ — продолжительность месяца. Используя эти соотношения и подставляя численные значения $R_Л = 3{,}8 \cdot 10^5$ км, $r = 6400$ км, получим

$$v = \frac{2\pi R_Л}{T_{мес}} - \frac{2\pi r}{T_{сут}} \approx 0{,}47 \text{ км/с}. \tag{4.17}$$

Смысл последней формулы легко уяснить, перейдя в систему отсчета, в которой Солнце покоится. Считая Солнце бесконечно удаленным, можно отвлечься от движения центра Земли, приняв во внимание лишь вращение Земли вокруг своей оси, а также движение Луны по ее орбите вокруг Земли. Луна движется по орбите с запада на восток со скоростью $v_Л = \dfrac{2\pi R_Л}{T_{мес}}$. Если бы Земля не вращалась, то с той же скоростью и в том же направлении по ее поверхности бежала бы и лунная тень. Но из-за вращения Земли экваториальные точки последней движутся с запада на восток со скоростью $v_З = \dfrac{2\pi r}{T_{сут}}$. Для нахождения скорости лунной тени эту величину надо вычесть из $v_Л$, что и сделано в формуле (4.17).

§ 5. Границы применимости классического способа описания движения

В классической механике состояние движения частицы в любой момент времени характеризуется положением (координатой x при одномерном движении) и *скоростью* $\boldsymbol{v}$. Вместо скорости можно пользоваться также *импульсом,* т. е. величиной $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, равной произведению *массы частицы* m на ее скорость *). Образом частицы является геометрическая точка, описывающая с течением времени непрерывную траекторию. В квантовой механике показано, что такой способ описания движения имеет принципиальные границы применимости. Здесь преждевременно вдаваться в подробное обсуждение этого вопроса. Достаточно ограничиться пред-

*) Мы предполагаем здесь, что читатель знаком с понятием массы. Понятие массы и импульса вводятся и подробно обсуждаются в § 10.