x составляем пропорцию

$$\frac{\omega_С R_С}{\omega_Л R_Л} = \frac{CC'}{ЛЛ'} = \frac{OC}{OЛ}.$$

Полагая в ней $OC = R_С$, $OЛ = R_Л - x - r$, получим уравнение для нахождения x. Оно дает

$$x = \frac{\omega_С - \omega_Л}{\omega_С} R_Л - r.$$

Следовательно, скорость движения лунной тени с запада на восток будет

$$v = \omega_С x = (\omega_С - \omega_Л) R_Л - \omega_С r.$$

Здесь $\omega_С = \frac{2\pi}{T_{сут}}$, $\omega_С - \omega_Л = \frac{2\pi}{T_{мес}}$, где $T_{сут} = 86400$ с — продолжительность солнечных суток, а $T_{мес} = 29{,}6\ T_{сут}$ — продолжительность месяца. Используя эти соотношения и подставляя численные значения $R_Л = 3{,}8 \cdot 10^5$ км, $r = 6400$ км, получим

$$v = \frac{2\pi R_Л}{T_{мес}} - \frac{2\pi r}{T_{сут}} \approx 0{,}47 \text{ км/с}. \tag{4.17}$$

Смысл последней формулы легко уяснить, перейдя в систему отсчета, в которой Солнце покоится. Считая Солнце бесконечно удаленным, можно отвлечься от движения центра Земли, приняв во внимание лишь вращение Земли вокруг своей оси, а также движение Луны по ее орбите вокруг Земли. Луна движется по орбите с запада на восток со скоростью $v_Л = \frac{2\pi R_Л}{T_{мес}}$. Если бы Земля не вращалась, то с той же скоростью и в том же направлении по ее поверхности бежала бы и лунная тень. Но из-за вращения Земли экваториальные точки последней движутся с запада на восток со скоростью $v_З = \frac{2\pi r}{T_{сут}}$. Для нахождения скорости лунной тени эту величину надо вычесть из $v_Л$, что и сделано в формуле (4.17).

§ 5. Границы применимости классического способа описания движения

В классической механике состояние движения частицы в любой момент времени характеризуется положением (координатой x при одномерном движении) и *скоростью* $\boldsymbol{v}$. Вместо скорости можно пользоваться также *импульсом*, т. е. величиной $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, равной произведению *массы частицы* m на ее скорость *). Образом частицы является геометрическая точка, описывающая с течением времени непрерывную траекторию. В квантовой механике показано, что такой способ описания движения имеет принципиальные границы применимости. Здесь преждевременно вдаваться в подробное обсуждение этого вопроса. Достаточно ограничиться пред-

---

*) Мы предполагаем здесь, что читатель знаком с понятием массы. Понятие массы и импульса вводятся и подробно обсуждаются в § 10.

варительным сообщением основного результата, не касаясь его обоснования.

Согласно квантовой механике состояние частицы в каждый момент времени нельзя характеризовать точными значениями ее координаты и импульса в этот момент времени. Если в каком-либо состоянии координата известна с неопределенностью δx, а импульс — с неопределенностью δp, то обе эти величины одновременно не могут быть сделаны сколь угодно малыми. Они связаны соотношением

$$\delta x \cdot \delta p \gtrsim h, \tag{5.1}$$

где h — универсальная постоянная, называемая *постоянной Планка* (1858—1947). Она играет основную роль во всех квантовых явлениях. Ее численное значение равно

$$h = 6{,}63 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}. \tag{5.2}$$

Соотношение (5.1) называется *принципом неопределенностей Гайзенберга* (р. 1901). Оно определяет принципиальный предел точности одновременного измерения координаты и импульса частицы, который не может быть превзойден никаким усовершенствованием приборов и методов измерения. Дело здесь не в ошибках измерений. Такова уж природа реальных частиц, что мгновенные состояния их движения не могут быть охарактеризованы классически — точными значениями координат и импульсов. Частицы ведут себя более сложно, чем материальные точки классической механики. Классическая картина движения по непрерывным траекториям лишь приближенно соответствует законам природы. Границы ее применимости определяются соотношением неопределенностей (5.1). Из него следует, что мгновенное состояние движения частицы нельзя также характеризовать абсолютно точными значениями координаты и скорости. Неопределенности этих величин должны удовлетворять условию

$$\delta x \cdot m\delta v \gtrsim h. \tag{5.3}$$

Для макроскопических тел практическая применимость классического способа описания движения не вызывает сомнений. Допустим, например, что речь идет о движении шарика с массой $m = 1$ г. Обычно положение шарика практически может быть определено с точностью до десятой или сотой доли миллиметра. Во всяком случае вряд ли имеет смысл говорить об ошибке в определении положения шарика, меньшей размеров атома. Положим поэтому $\delta x = 10^{-8}$ см. Тогда из соотношения неопределенностей (5.1) найдем

$$\delta v \gtrsim \frac{6{,}63 \cdot 10^{-27}}{10^{-8}} \approx 10^{-18} \text{ см/с}.$$

Одновременная малость величин δx и δv и является доказательством практической применимости классического способа описания движения для макроскопических тел. Не так обстоит дело, когда речь идет об атомных явлениях — явлениях, происходящих с частицами очень малой массы в очень малых объемах пространства. Рассмотрим, например, движение электрона в атоме водорода. Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г. Ошибка в положении электрона δx во всяком случае не должна превышать размеры атома, т. е. должно быть $\delta x < 10^{-8}$ см. Но тогда из соотношения неопределенностей получаем

$$\delta v > \frac{h}{m\delta x} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-27}}{9{,}11 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-8}} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ см/с.}$$

Эта величина не меньше, а даже больше самой скорости электрона в атоме, которая по порядку величины равна 10^8 см/с. При таком положении классическая картина движения теряет всякий смысл.

§ 6. О смысле производной и интеграла в приложениях к физическим вопросам

1. Процесс предельного перехода (3.4), с помощью которого определяется производная, называется *дифференцированием*. Понятие производной широко используется в механике и во всех других разделах физики. Именно задача об определении скорости произвольного движения привела к этому понятию Ньютона, который, наряду с Лейбницем (1646—1716), является основоположником дифференциального и интегрального исчислений. Обозначение $\frac{dx}{dt}$ для производной принадлежит Лейбницу. На символ $\frac{dx}{dt}$ в математике следует смотреть как на единое целое, а не как на отношение двух «бесконечно малых» приращений dx и dt. Смысл производной $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ точно определен соотношением (3.4). Сначала надо образовать отношение конечных приращений $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, предполагая, что Δt не равно нулю. Затем путем преобразований этого отношения или каким-либо иным способом следует совершить переход к пределу. Но ни в коем случае нельзя представлять себе, что сначала совершен какой-то предельный переход от Δx и Δt к «бесконечно малым» величинам dx и dt, называемым *дифференциалами* функции x и аргумента t, а затем взято отношение этих дифференциалов $\frac{dx}{dt}$. Такой взгляд на производную существовал в начальной стадии развития дифференциального исчисления. Однако он не совместим с требованием математической ясности понятий, да и вообще лишен смысла. Правда, можно так определить дифференциалы dx и dt, что их отношение сделается равным производной $\dot{x}$. В математике дифференциал dt определяется как произвольное приращение