ния движения для макроскопических тел. Не так обстоит дело, когда речь идет об атомных явлениях — явлениях, происходящих с частицами очень малой массы в очень малых объемах пространства. Рассмотрим, например, движение электрона в атоме водорода. Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г. Ошибка в положении электрона δx во всяком случае не должна превышать размеры атома, т. е. должно быть $\delta x < 10^{-8}$ см. Но тогда из соотношения неопределенностей получаем

$$\delta v > \frac{h}{m\delta x} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-27}}{9{,}11 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-8}} \approx 7 \cdot 10^{8} \text{ см/с}.$$

Эта величина не меньше, а даже больше самой скорости электрона в атоме, которая по порядку величины равна 10^8 см/с. При таком положении классическая картина движения теряет всякий смысл.

§ 6. О смысле производной и интеграла в приложениях к физическим вопросам

1. Процесс предельного перехода (3.4), с помощью которого определяется производная, называется *дифференцированием*. Понятие производной широко используется в механике и во всех других разделах физики. Именно задача об определении скорости произвольного движения привела к этому понятию Ньютона, который, наряду с Лейбницем (1646—1716), является основоположником дифференциального и интегрального исчислений. Обозначение $\frac{dx}{dt}$ для производной принадлежит Лейбницу. На символ $\frac{dx}{dt}$ в математике следует смотреть как на единое целое, а не как на отношение двух «бесконечно малых» приращений dx и dt. Смысл производной $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ точно определен соотношением (3.4). Сначала надо образовать отношение конечных приращений $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, предполагая, что Δt не равно нулю. Затем путем преобразований этого отношения или каким-либо иным способом следует совершить переход к пределу. Но ни в коем случае нельзя представлять себе, что сначала совершен какой-то предельный переход от Δx и Δt к «бесконечно малым» величинам dx и dt, называемым *дифференциалами* функции x и аргумента t, а затем взято отношение этих дифференциалов $\frac{dx}{dt}$. Такой взгляд на производную существовал в начальной стадии развития дифференциального исчисления. Однако он не совместим с требованием математической ясности понятий, да и вообще лишен смысла. Правда, можно так определить дифференциалы dx и dt, что их отношение сделается равным производной $\dot{x}$. В математике дифференциал dt определяется как произвольное приращение

аргумента t, а дифференциал функции dx — с помощью соотношения $dx = \dot{x}dt$. Но теперь в утверждении, что производная есть отношение двух конечных величин dx и dt, нет ничего удивительного, это — простая тавтология, иной способ выражения. Первичным, по-прежнему, является понятие производной, а не дифференциала.

Однако в приложениях математики к физике надо считаться с тем, что физические величины получаются в конце концов в результате конкретных измерений, а все измерения сопровождаются ошибками и вносят искажения в естественный ход явлений. Это обстоятельство, строго говоря, делает невозможным предельный переход $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, вводимый в математике при определении производной. Допустим, например, что измеряется скорость движущейся пули в воздухе. Задача сводится к измерению расстояния Δx и промежутка времени Δt, за который пуля проходит это расстояние. Если время Δt взять очень большим, то за это время скорость пули может заметно уменьшиться из-за сопротивления воздуха. Отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ в этом случае может оказаться заметно меньше скорости пули в рассматриваемый момент времени. Уменьшая время Δt, мы заметим, что, начиная с определенного момента, отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ в пределах доступной точности измерения перестает изменяться, если отвлечься от случайных ошибок, сопровождающих каждое измерение. Дальнейшее уменьшение Δt бессмысленно. Оно может только ухудшить дело, так как при дальнейшем уменьшении Δt отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ начинает изменяться снова и притом все более и более нерегулярно. Оно принимает различные значения от очень больших до очень малых. Это обусловлено тем, что относительная точность любого измерения тем меньше, чем меньше измеряемая величина. Не представляет, например, особо большого труда измерить длину в один метр с точностью до одного миллиметра, т. е. с относительной точностью 1/1000. Но измерить с такой же относительной точностью длину в один миллиметр значительно труднее. Чем меньше Δt, тем меньше точность, с которой мы вычисляем отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Если Δt уменьшать беспредельно, то вычисленные значения отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ не будут стремиться ни к какому определенному пределу. Это показывает, что в рассматриваемом примере из-за ошибок измерений предельный переход к $\Delta t \to 0$ не может быть осуществлен в строго математическом смысле. Вычислить истинную скорость или производную $v = \dot{x}$ из физических измерений можно лишь приближенно, отождествляя ее с отношением конечных приращений $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Оптимальная величина времени Δt, при которой точность вычисления истинной скорости максимальна, определяется конкретными условиями. Малые, но конечные приращения Δx и Δt, отношение которых с достаточной точностью аппроксимирует производную $\dot{x}$, физик называет *бесконечно малыми* или, полнее, *физически бесконечно малыми величинами*. Он обозначает их посредством dx и dt и обращается с ними как с математическими дифференциалами. Таким образом, в *физике производная выступает как отношение конечных, но достаточно малых приращений функции и аргумента, а не как предел этого отношения.*

Однако не только ошибки измерений могут сделать невозможным практическое выполнение предельного перехода в строго математическом смысле. Такая невозможность может быть и принципиальной, обусловленной самой природой физических величин и физических законов. Так, точное выполнение предельного перехода невозможно из-за соотношения неопределенностей (5.1) Действительно, если промежуток времени Δt стремится к нулю, то при этом будет стремиться к нулю и проходимое расстояние Δx. Неопределенность δx в измерении проходимого расстояния не должна превосходить Δx. Иначе вычисление средней скорости по формуле $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ потеряло бы всякий смысл. Таким образом, при $\Delta t \to 0$ должна стремиться к нулю и неопределенность в координате δx. Но тогда, согласно соотношению (5.1), неопределенность скорости δv будет стремиться к бесконечности. Это значит, что ошибка, которую мы делаем при вычислении скорости v по формуле (3.3), сколь угодно велика по сравнению с самой скоростью v.

2. Изложенные выводы относятся не только к производной координаты, но и к производным всяких физических величин. Допустим, например, что требуется определить плотность вещества в какой-либо точке пространства. С этой целью можно поступить следующим образом. Окружим рассматриваемую точку замкнутой поверхностью, ограничивающей объем ΔV. Обозначим через Δm массу вещества, содержащегося в этом объеме. Отношение

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

называется *средней плотностью вещества в объеме* ΔV. Средняя плотность, вообще говоря, зависит от величины и формы объема ΔV, внутри которого находится рассматриваемая точка. Чтобы исключить эту зависимость, вводят понятие *истинной плотности* вещества, определяя ее путем предельного перехода $\Delta V \to 0$. Обычно говорят, что при этом средняя плотность $\rho_{\text{ср}}$ стремится к определенному пределу ρ, который и называется истинной плотностью вещества в рассматриваемой точке пространства:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \tag{6.1}$$

Истинная плотность определяется, таким образом, *как производная массы по объему*. Эта величина зависит только от положения точки, к которой она относится. Однако, если в формуле (6.1) предельный переход понимать буквально в строго математическом смысле, то для реальных тел он выполнен быть не может из-за атомистической структуры вещества. При уменьшении объема в нем рано или поздно окажется лишь небольшое число молекул, например, одна или даже ни одной молекулы. Кроме того, молекулы совершают беспорядочные тепловые движения, одни молекулы уходят из объема ΔV, другие вступают в него. Ввиду этого число молекул в фиксированном малом объеме ΔV весьма быстро и беспорядочно меняется во времени. При уменьшении ΔV отношение $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ будет быстро и беспорядочно меняться от нуля, когда внутри объема ΔV нет молекул, до очень больших значений, когда в него попадет одна или несколько молекул. При бесконечном уменьшении ΔV отношение $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ не будет стремиться к определенному пределу. Ввиду этого при определении истинной плотности вещества нельзя брать величины Δm и ΔV сколь угодно малыми. Объем ΔV должен иметь макроскопические размеры, т. е. содержать еще очень большое число молекул. Но он должен быть и достаточно мал, чтобы содержащееся в нем вещество могло рассматриваться приближенно как макроскопически однородное. Если оба эти требования выполняются, то отношение $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ будет иметь практически вполне определенное значение, не меняющееся при дальнейшем уменьшении макроскопического объема ΔV. Это отношение мы и принимаем в физике за производную массы m по объему V. Величины Δm и ΔV, удовлетворяющие указанным двум требованиям, в физике рассматриваются как *физически бесконечно малые,* и с ними физика обращается как с математическими дифференциалами. Математически этому соответствует замена реального тела идеализированной моделью с непрерывным распределением масс.

3. Совершенно так же обстоит дело с понятием интеграла. В математике интеграл определяется предельным переходом

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Числовой промежуток (a, b) разбивается на n частичных промежутков $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Длина каждого из них Δx_i умножается на значение функции $f(x)$ в произвольной точке, лежащей внутри рассматриваемого частичного промежутка. Затем составляется сумма $\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i$ и выполняется переход к пределу $n \to \infty$ в предположении, что длина каждого из частичных промежутков стремится к нулю. В физике, однако, из-за ошибок измерений или по принципиальным соображениям (например, из-за атомистической структуры вещества) деление промежутка (a, b) на частичные промежутки меньше определенной длины (величина которой зависит от конкретных условий) теряет смысл. Ввиду этого предельный переход к $\Delta x_i \to 0$ не может быть выполнен до конца, а должен быть оборван на каком-то месте. Это означает, что *в физике интеграл выступает не как предел суммы, а как сумма большого числа достаточно малых слагаемых* $\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i$.

§ 7. О векторах и сложении движений

1. Понятие вектора и основные операции векторной алгебры мы считаем известными. Остановимся только на разъяснении некоторых принципиальных моментов, представляющих особый интерес в физике. Среди физических величин встречаются величины, не имеющие направления, и величины, которым можно приписать определенное направление. Величины первого рода называются *скалярами*. К ним относятся, например, масса, энергия, температура, электрический заряд и пр. Величины второго рода называются *векторами*. Примерами векторов являются скорость, ускорение, сила, напряженности электрического и магнитного полей и пр. Векторы принято изображать направленными отрезками или стрелками и обозначать буквами полужирного шрифта ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, ...) или (реже) буквами, над которыми поставлены стрелки ($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, ...).

В качестве дополнения к приведенному определению иногда указывают, что не всякие направленные величины являются векторами, а только такие, которые складываются *геометрически*, т. е. по *правилу параллелограмма*. Однако это указание остается расплывчатым и бессодержательным, пока не сказано, что следует понимать под сложением рассматриваемых физических величин. Смысл сложения физических величин еще не определяется их физической природой. Сначала надо указать, что́ мы понимаем под сложением двух физических величин, а затем уже находить правила, по которым должно производиться это сложение. Только тогда указание, о котором говорилось выше, приобретает определенное содержание. Нередко для решения вопроса, являются ли рассматриваемые физические величины векторами или не являются, в их сложение вкладывают такой смысл, который к этому вопросу не имеет никакого отношения.

2. Например, сложение скоростей в механике понимают в следующем смысле. Пусть точка движется относительно системы отсчета S_1 со скоростью $\mathbf{v}_1$ (например, пассажир идет по палубе корабля). Пусть далее система отсчета S_1 сама движется со скоростью $\mathbf{v}_2$ относительно другой системы отсчета S_2, условно принимаемой за неподвижную (например, корабль движется относительно берега).