принципиальным соображениям (например, из-за атомистической структуры вещества) деление промежутка (a, b) на частичные промежутки меньше определенной длины (величина которой зависит от конкретных условий) теряет смысл. Ввиду этого предельный переход к $\Delta x_i \to 0$ не может быть выполнен до конца, а должен быть оборван на каком-то месте. Это означает, что *в физике интеграл выступает не как предел суммы, а как сумма большого числа достаточно малых слагаемых* $\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i$.

§ 7. О векторах и сложении движений

1. Понятие вектора и основные операции векторной алгебры мы считаем известными. Остановимся только на разъяснении некоторых принципиальных моментов, представляющих особый интерес в физике. Среди физических величин встречаются величины, не имеющие направления, и величины, которым можно приписать определенное направление. Величины первого рода называются *скалярами*. К ним относятся, например, масса, энергия, температура, электрический заряд и пр. Величины второго рода называются *векторами*. Примерами векторов являются скорость, ускорение, сила, напряженности электрического и магнитного полей и пр. Векторы принято изображать направленными отрезками или стрелками и обозначать буквами полужирного шрифта ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ...) или (реже) буквами, над которыми поставлены стрелки ($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, ...).

В качестве дополнения к приведенному определению иногда указывают, что не всякие направленные величины являются векторами, а только такие, которые складываются *геометрически*, т. е. по *правилу параллелограмма*. Однако это указание остается расплывчатым и бессодержательным, пока не сказано, что следует понимать под сложением рассматриваемых физических величин. Смысл сложения физических величин еще не определяется их физической природой. Сначала надо указать, чтó мы понимаем под сложением двух физических величин, а затем уже находить правила, по которым должно производиться это сложение. Только тогда указание, о котором говорилось выше, приобретает определенное содержание. Нередко для решения вопроса, являются ли рассматриваемые физические величины векторами или не являются, в их сложение вкладывают такой смысл, который к этому вопросу не имеет никакого отношения.

2. Например, сложение скоростей в механике понимают в следующем смысле. Пусть точка движется относительно системы отсчета S_1 со скоростью $\boldsymbol{v}_1$ (например, пассажир идет по палубе корабля). Пусть далее система отсчета S_1 сама движется со скоростью $\boldsymbol{v}_2$ относительно другой системы отсчета S_2, условно принимаемой за неподвижную (например, корабль движется относительно берега).

Под сложением движений понимают операцию, с помощью которой по этим данным можно найти скорость $\boldsymbol{v}$ точки (пассажира) относительно неподвижной системы S_2 (берега). В релятивистской кинематике это определение должно быть дополнено указанием, что каждая из скоростей $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ измеряется с помощью линеек и часов в той системе отсчета, относительно которой рассматривается движение. В нерелятивистской кинематике такое указание излишне, так как длины и промежутки времени в ней имеют абсолютный смысл, т. е. не зависят от системы отсчета. И вот оказывается, что сложение движений в указанном смысле в нерелятивистской кинематике производится по правилу параллелограмма, а в релятивистской кинематике это правило не справедливо. Тем не менее скорость точки считается вектором как в той, так и в другой кинематике. Это показывает, что правило параллелограмма скоростей для сложения движений в указанном смысле не имеет никакого отношения к вопросу о том, является скорость вектором или не является *).

Да и в самой нерелятивистской кинематике можно указать величины, которые считаются векторами, но тем не менее не всегда складываются по правилу параллелограмма, если в сложение этих величин вложить примерно такой же смысл, что и в сложение скоростей в вышеприведенном примере. К таким величинам относится, например, ускорение. Пусть точка движется относительно системы отсчета S_1 с ускорением $\boldsymbol{a}_1$, а система S_1 имеет ускорение $\boldsymbol{a}_2$ относительно «неподвижной» системы отсчета S_2. По этим данным можно найти ускорение $\boldsymbol{a}$ точки относительно системы S_2 только в том случае, когда складываемые движения являются поступательными. В этом случае вектор $\boldsymbol{a}$ находится по правилу параллелограмма. В остальных случаях для нахождения результирующего ускорения знания ускорений $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ недостаточно, и само нахождение вектора $\boldsymbol{a}$ производится по более сложному правилу, которое будет рассмотрено в § 64.

3. Приведенные примеры показывают, что определение вектора нуждается в уточнении. Необходимость этого диктуется также следующими соображениями. Не всегда очевидно, какое направление следует приписать той или иной физической величине. Например, в случае геометрического отрезка AB не возникает вопроса,

*) Если бы все скорости измерялись в одной и той же «неподвижной» системе отсчета S_2, то правило параллелограмма сохраняло бы силу и в релятивистской кинематике. Однако при этом изменился бы смысл скорости $\boldsymbol{v}_1$. Под $\boldsymbol{v}_1$ следовало бы понимать скорость точки относительно движущейся системы отсчета S_1, *измеренную в «неподвижной» системе* S_2. При сложении же скоростей в том смысле, в каком оно понимается в тексте, $\boldsymbol{v}_1$ есть скорость точки относительно движущейся системы S_1, *измеренная в той же системе*. А это существенно иная величина. Только в предельном случае бесконечно медленных движений обе скорости совпадают. При изложении теории относительности затронутые вопросы будут разобраны подробно.

что следует считать его направлением. За таковое можно принять либо направление от точки A к точке B, либо противоположное направление — от точки B к точке A. Не возникает вопроса, что́ следует считать направлением смещения, скорости или ускорения точки, а также направлением силы, на нее действующей. Однако не очевидно, что́ следует считать за направление угловой скорости или геометрической поверхности, в особенности когда последняя изогнута. Наконец, точное определение вектора необходимо дать для того, чтобы обобщить это понятие на случай *многомерных пространств*. Чтобы прийти к такому определению, рассмотрим сначала простейший вектор, а именно геометрический прямолинейный отрезок, на котором установлено определенное направление. Такой направленный отрезок будем изображать стрелкой $\boldsymbol{a}$. Возьмем какую-либо произвольную прямоугольную или косоугольную систему координат и спроектируем отрезок $\boldsymbol{a}$ на координатные оси X, Y, Z. Проектирование будем производить плоскостями, параллельнымм координатным плоскостям. Например, чтобы получить проекцию на ось X, надо через концы отрезка $\boldsymbol{a}$ провести плоскости, параллельные координатной плоскости YZ. Эти плоскости и отсекут на оси X отрезок a_x, являющийся проекцией отрезка $\boldsymbol{a}$ на рассматриваемую ось. Аналогично получаются остальные две проекции a_y и a_z. Обычно рассматривают прямоугольные координатные системы. Тогда a_x, a_y, a_z будут *прямоугольными* или *ортогональными проекциями* отрезка $\boldsymbol{a}$. Если проекции a_x, a_y, a_z известны в какой-либо системе координат S, то можно найти их и в любой другой координатной системе S', оси которой произвольным образом повернуты относительно системы S. Для этого по проекциям a_x, a_y, a_z в системе S надо восстановить отрезок $\boldsymbol{a}$, как диагональ параллелепипеда, построенного на отрезках a_x, a_y, a_z. Затем следует спроектировать этот отрезок на оси X', Y', Z' новой системы координат S'. Получится тройка чисел $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, которые и являются проекциями отрезка $\boldsymbol{a}$ в новой системе координат. Теперь мы даем следующее определение вектора.

Вектором $\boldsymbol{a}$ называется упорядоченная тройка чисел a_x, a_y, a_z, заданная в каждой системе координат. (Упорядочение состоит в том, что первое число a_x приводится в соответствие оси X, второе a_y — оси Y, третье a_z — оси Z.) Эти числа называются *проекциями вектора* $\boldsymbol{a}$ на соответствующие координатные оси. Их называют также *составляющими* или *компонентами вектора. При переносе начала и повороте координатных осей составляющие* a_x, a_y, a_z *преобразуются по правилу преобразования проекций геометрических отрезков*.

Короче, *вектором* называется упорядоченная тройка чисел, заданная в каждой системе координат, которые при переносе начала и повороте координатных осей преобразуются как разности координат концов направленного геометрического отрезка.

Отложив эти числа вдоль координатных осей X, Y, Z, мы отсечем на них три отрезка. Если на таких трех отрезках как на ребрах построить параллелепипед, то его диагональ можно рассматривать как направленный отрезок, служащий наглядным изображением вектора. Этот отрезок получится одним и тем же, какую бы систему координат мы ни использовали при его построении. В этом проявляется *инвариантный* характер вектора, т. е. независимость его от системы координат, использованной для его представления. Компоненты вектора a_x, a_y, a_z в разных системах координат разные, но самый вектор $\boldsymbol{a}$ один и тот же. Векторное равенство $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, записанное в координатной форме, равносильно трем равенствам $a_i = b_i$ ($i = x, y, z$). При переходе к другой (штрихованной) системе координат обе части этих равенств преобразуются одинаково. Поэтому в новой системе координат они сохраняют прежний вид, т. е. $a_{i'} = b_{i'}$ ($i' = x', y', z'$). Уравнения, обе части которых при переходе к другой системе координат преобразуются одинаково и благодаря этому сохраняют свой вид во всех координатных системах, называются *ковариантными или инвариантными* по отношению к рассматриваемому преобразованию координатных систем. Мы видим, что *векторное уравнение* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ *инвариантно по отношению к переносу начала и повороту координатных осей. Ввиду этой инвариантности уравнения, выражающие физические законы в векторной форме, не зависят от выбора осей координат.* С помощью векторов физические законы формулируются в простой и обозримой форме, которая не сохраняется, если выразить их через проекции векторов в какой-либо системе координат.

Заметим, что координатные оси X, Y, Z не обязательно должны поворачиваться вместе подобно повороту твердого тела. Определение предусматривает и такие случаи, когда оси X, Y, Z поворачиваются независимо. Путем поворотов такого типа может быть совершен переход от любой прямолинейной системы координат к другой прямолинейной системе — правой или левой, оси которой ориентированы совершенно произвольно. В частности, такими поворотами может быть осуществлена инверсия осей, т. е. одновременное изменение на противоположные положительных направлений всех трех осей.

Если обе координатные системы прямоугольные, то формулы преобразования проекций вектора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{x'} &= \alpha_{x'x}a_x + \alpha_{x'y}a_y + \alpha_{x'z}a_z, \\ a_{y'} &= \alpha_{y'x}a_x + \alpha_{y'y}a_y + \alpha_{y'z}a_z, \\ a_{z'} &= \alpha_{z'x}a_x + \alpha_{z'y}a_y + \alpha_{z'z}a_z, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $\alpha_{x'x}$, $\alpha_{x'y}$, ... — косинусы углов между соответствующими координатными осями обеих систем координат. Например, $\alpha_{y'z}$ означает косинус угла между положительными направлениями осей Y' и Z.

4. Аналогично, *скаляром* или *инвариантом* называется число, заданное в каждой системе координат, причем при переносе начала и повороте координатных осей это число остается неизменным. Таким образом, как и определение вектора, это определение предусматривает только перенос начала и поворот координатных осей. Оно предполагает, что обе координатные системы должны оставаться неподвижными одна относительно другой. Примерами скаляров являются время, масса, электрический заряд и пр. Абсцисса x неподвижной точки не является скаляром, так как ее численное значение в разных системах координат разное. Скаляры можно образовывать из векторов. Например, скаляром является *длина вектора* или ее *квадрат*, который в прямоугольной системе координат представляется выражением $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. *Скаляром является скалярное произведение двух векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, *т. е. величина* $(\boldsymbol{ab}) = ab\cos\vartheta$, где ϑ — угол между этими векторами. В прямоугольной системе координат, как известно, скалярное произведение представляется выражением $(\boldsymbol{ab}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (см. задачи 1 и 3 к этому параграфу).

5. На основании изложенного ясно, что для доказательства векторного характера той или иной направленной физической величины надо только установить, как определяются ее составляющие вдоль координатных осей и как они преобразуются при переходе от одной координатной системы к любой другой, оси которой повернуты относительно осей первоначальной системы. При этом имеются в виду координатные системы, неподвижные одна относительно другой.

Например, двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с составляющими a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z можно сопоставить в каждой системе координат упорядоченную тройку чисел $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$. Легко видеть, что такая тройка чисел образует вектор, так как эти числа подчиняются тем же правилам преобразования, что и составляющие векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Вектор $\boldsymbol{c}$ (c_x, c_y, c_z) называется *суммой векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Легко доказать, что он может быть получен из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ геометрическим построением по правилу параллелограмма. Аналогично определяется и *вычитание векторов. Разность двух векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ есть вектор $\boldsymbol{d}$, определяемый упорядоченной тройкой чисел $d_x = a_x - b_x$, $d_y = a_y - b_y$, $d_z = a_z - b_z$. Для его построения надо изменить на противоположное направление вектора $\boldsymbol{b}$ (получаемый таким путем вектор обозначают $-\boldsymbol{b}$), а затем на векторах $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{b}$ построить параллелограмм.

В таком смысле сложение и вычитание векторов вводится путем *математического определения*. Над векторами можно производить и другие операции, вводимые таким же путем, например умножение вектора на скаляр или скалярное и векторное перемножение двух векторов. Все операции такого типа мы называем *математическими*. Их свойства устанавливаются соответствующими математическими теоремами. Не имеет смысла ставить вопрос об опытной проверке результатов, получаемых с помощью таких математических операций. Например, о сложении векторов, как оно только что определено, мы будем говорить как о *математическом сложении* или *сложении в математическом смысле*. Но когда векторами изображают различные физические величины, часто в их сложение или вычитание вкладывается какой-то другой смысл. А именно для получения суммы или разности векторов над ними надо произвести какие-то (хотя бы мысленные) *физические операции*. Сложение и вычитание в таком смысле мы условимся называть *физическими*. Будет ли какое-либо конкретное физическое сложение совпадать с математическим (т. е. с правилом параллелограмма) и будет ли в результате такого сложения получаться вектор — это требует дополнительного исследования, в частности опытного.

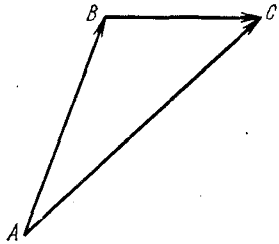

Рис. 14.

6. Поставим, например, такой вопрос. Точка перешла из A в положение B вдоль прямолинейного отрезка $\overrightarrow{AB}$ (рис. 14). Затем из положения B она перешла в C вдоль отрезка $\overrightarrow{BC}$. Вдоль какого прямолинейного отрезка должна перемещаться точка, чтобы из A попасть в C? Ясно, что таким отрезком является отрезок $\overrightarrow{AC}$. Его можно рассматривать как геометрическую сумму отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Сложение перемещений в таком понимании производится по правилу параллелограмма, т. е. совпадает с математическим сложением векторов. Тому же правилу подчиняется и сложение скоростей в следующем смысле. Точка в течение секунды перешла из A в B, двигаясь равномерно со скоростью $\boldsymbol{v}_1$. Затем также в течение секунды она перешла из B в C с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_2$. С какой постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ должна двигаться точка, чтобы в одну секунду перейти из A в C? Но в сложение скоростей обычно вкладывается другой смысл, разъясняемый на следующем примере. Точка перешла из A в B вдоль прямолинейного отрезка на палубе корабля, двигаясь равномерно со скоростью $\boldsymbol{v}_1$. За то же время сам корабль переместился относительно берега на отрезок BC, двигаясь с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_2$. С какой скоростью $\boldsymbol{v}$ двигалась точка относительно берега? Здесь сложение движений и их скоростей понимается в *другом смысле*. Оба движения рассматриваются в *разных* системах отсчета, движущихся одна относительно другой. Одной системой является корабль, и скорость $\boldsymbol{v}_1$ измеряется с помощью линеек и часов в этой системе. Другой системой является берег, с помощью линеек и часов этой системы измеряются скорости $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{v}$. На вопрос о результате сложения в таком смысле должен в конце концов ответить опыт. Дорелятивистская кинематика утверждала, что по своему результату сложение движений во втором смысле не может отличаться от сложения в первом смысле. Это происходит потому, что в дорелятивистской физике длины отрезков и промежутков времени не зависят от того, в какой системе отсчета они измеряются. Сложение скоростей и во втором смысле в дорелятивистской кинематике происходило по правилу параллелограмма, т. е. совпадало с математическим сложением векторов. В релятивистской кинематике это уже не так. *Сложение скоростей во втором смысле не подчиняется правилу параллелограмма.* Это правило приближенно верно только в пределе, когда обе складываемые скорости очень малы по сравнению со скоростью света.

7. Каждому вектору $\boldsymbol{a}$ $(a_x,\ a_y,\ a_z)$ и скаляру λ можно аксиоматически сопоставить объект $\lambda\boldsymbol{a}$, задаваемый упорядоченной тройкой чисел λa_x, λa_y, λa_z. Легко убедиться, что такой объект будет вектором. Он называется *произведением скаляра* λ *на вектор* $\boldsymbol{a}$. Бесконечно малое приращение вектора $d\boldsymbol{a}$ само является вектором. Бесконечно малое приращение любого скаляра t есть также скаляр dt. Этим двум величинам можно сопоставить вектор $\frac{1}{dt}\,d\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, называемый *производной вектора* $\boldsymbol{a}$ *по скаляру* t.

8. Теперь мы в состоянии доказать векторную природу многих физических величин, с которыми имеет дело механика. Прежде всего, *смещение точки из какого-либо положения A в другое положение B вдоль соединяющего их прямолинейного отрезка AB есть вектор*. Это очевидно, так как по самому определению при смещении начала и повороте координатных осей компоненты вектора должны преобразовываться так же, как проекции направленного отрезка. Обозначим рассматриваемый отрезок $\boldsymbol{r}$. Продифференцируем этот отрезок по времени t в предположении, что начальная точка его закреплена. *Производная* $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ *будет вектором*, так как время — скаляр. Но такая производная есть скорость точки $\boldsymbol{v}$. Таким образом, *скорость* $\boldsymbol{v}$ есть также *вектор*. Дифференцируя $\boldsymbol{v}$ снова по t, найдем *другой вектор — ускорение точки* $\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. *Масса точки* m *является скаляром*. Умножая его на скорость $\boldsymbol{v}$, получаем *вектор* $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$, называемый *импульсом точки*. Дифференцируя его по времени, получаем *силу* $\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$, действующую на точку. Таким образом, *сила есть вектор*.

9. Приведем несколько более сложные примеры векторов. Возьмем в пространстве какой-либо *ориентированный контур* L, т. е. не самопересекающуюся замкнутую кривую, проходимую в каком-то определенном направлении. Спроектируем этот контур на координатные плоскости прямоугольной системы координат XYZ. Получим три ориентированных плоских замкнутых контура

L_x, L_y, L_z, лежащих в координатных плоскостях YZ, ZX, XY соответственно (на рис. 15 контур L не изображен, изображены только его проекции). Обозначим S_x, S_y, S_z площади, ограниченные замкнутыми контурами L_x, L_y, L_z. Эти величины будем считать положительными, если контуры L_x, L_y, L_z обходятся в *положительных направлениях,* и отрицательными в противоположном случае. Положительные направления обхода контуров L_x, L_y, L_z задаются по-разному в зависимости от того, какая используется система координат — правая или левая. В правой системе координат направления обхода контуров L_x, L_y, L_z считаются положительными, если они находятся в *правовинтовом соотношении* с положительными направлениями координатных осей X, Y, Z соответственно, а в левой системе — в *левовинтовом*. Это значит, например, что в правой системе координат вращение ручки буравчика с правой нарезкой в положительном направлении контура L_z приводит к поступательному перемещению буравчика в положительном направлении оси Z.

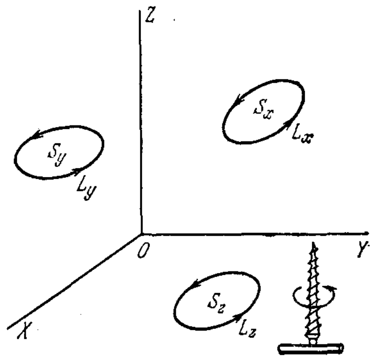

Рис. 15.

В левой системе будет то же самое, если взять буравчик с левой нарезкой. При таком соглашении о знаках площади S_x, S_y, S_z представляются интегралами

$$S_x = \int_{L_x} y\,dz, \qquad S_y = \int_{L_y} z\,dx, \qquad S_z = \int_{L_z} x\,dy, \tag{7.2}$$

взятыми по контурам L_x, L_y, L_z, независимо от того, применяется ли правая или левая система координат.

Мы утверждаем, что тройка чисел S_x, S_y, S_z образует вектор, с одной оговоркой, о которой будет сказано ниже. Для доказательства рассмотрим сначала частный случай, когда контур L плоский. Вдоль нормали к плоскости контура отложим направленный отрезок $\boldsymbol{A}$, длина которого численно равна площади S, ограниченной контуром L, а направление находится в правовинтовом соотношении с направлением обхода по контуру, если используется правая система координат, и в левовинтовом соотношении, если используется левая система (рис. 16). Сначала будем пользоваться системами координат только какого-либо определенного типа: либо только одними правыми, либо только одними левыми. Построенный нами отрезок $\boldsymbol{A}$ совершенно не зависит от выбора координатных осей, а потому является вектором. Его проекции на координатные оси равны $A_x = A \cos(\boldsymbol{A}, X)$, $A_y = A \cos(\boldsymbol{A}, Y)$, $A_z = A \cos(\boldsymbol{A}, Z)$. С другой стороны, по известной геометрической теореме

$$S_x = S\cos(\boldsymbol{A},\ X), \qquad S_y = S\cos(\boldsymbol{A},\ Y), \qquad S_z = S\cos(\boldsymbol{A},\ Z).$$

Так как длину $\boldsymbol{A}$ мы выбрали численно равной S, то в любой системе координат $S_x = A_x$, $S_y = A_y$, $S_z = A_z$. Отсюда следует, что при вращении координатной системы S_x, S_y, S_z преобразуются так же, как компоненты вектора $\boldsymbol{A}$. Поэтому S_x, S_y, S_z образуют вектор. Его мы будем обозначать $\boldsymbol{S}$ и называть *вектором площади,* ограниченной ориентированным контуром L. В этом смысле говорят, что площадь является вектором. Это утверждение доказано нами для плоских контуров и плоских площадей.

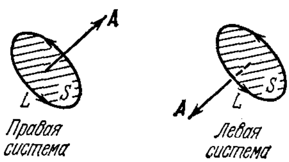

Рис. 16.

Обобщение на случай неплоских контуров и площадей не представляет затруднений. Пусть L — такой контур. Натянем на него совершенно произвольную поверхность и разобьем ее на достаточно большое число n малых ориентированных областей, как указано на рис. 17. Проектируя их на координатные плоскости, получим

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{ix}, \qquad S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{iy}, \qquad S_z = \sum_{i=1}^{n} S_{iz},$$

где S_{ix}, S_{iy}, S_{iz} — проекции на те же плоскости i-й элементарной области. Число n можно взять сколь угодно большим и рассматривать каждую малую область S_i как плоскую. Тогда на основании доказанного можно утверждать, что S_{ix}, S_{iy}, S_{iz} образуют вектор. Будет образовывать вектор и тройка чисел S_x, S_y, S_z, так как эти числа получаются путем сложения компонентов векторов $\boldsymbol{S}_i$.

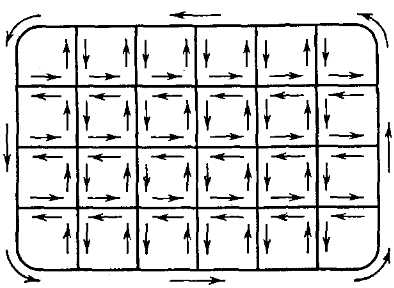

Рис. 17.

10. В одном отношении, однако, тройка чисел S_x, S_y, S_z отличается от вектора. Эти числа преобразуются так же, как компоненты вектора при *вращении координатной системы как целого,* когда система координат все время остается либо правой, либо левой. Однако они ведут себя существенно иначе при *переходе от правой системы координат к левой или наоборот,* например, при инверсии координатных осей. В этом случае для нахождения направления $\boldsymbol{S}$ надо перейти от одного винта к другому. Если в правой системе координат величину S изобразить стрелкой, то при переходе к левой направление стрелки надо изменить на противоположное. Величины такого типа называются *псевдовекторами* или *аксиальными векторами,* в отличие от *полярных векторов,* которые мы рассматривали до сих пор. *При повороте координатной системы как целого аксиальные векторы ведут себя в точности так же, как и полярные векторы. При инверсии координатных осей компоненты полярных векторов меняют знаки, в то время как компоненты аксиальных векторов остаются неизменными.*

Можно было бы обойтись и без введения аксиальных векторов. Но тогда не все формулы имели бы один и тот же вид в правых и левых координатных системах. Например, если бы в правых системах координат мы определили тройку чисел S_x, S_y, S_z формулами (7.2), а в левых — теми же формулами, но с измененными знаками, то такая тройка чисел образовывала бы полярный вектор. Аксиальные векторы для того и вводятся, чтобы все формулы имели совершенно одинаковый вид в правых и левых системах координат.

Аналогично, наряду с *истинными скалярами* вводятся так называемые *псевдоскаляры. Скаляр или инвариант* есть число, остающееся неизменным во всех системах координат, как правых, так и левых. *Псевдоскаляр или псевдоинвариант остается неизменным при переходах от правых систем координат к правым же или от левых к левым же. При переходе же от правой системы к левой или наоборот псевдоскаляр меняет знак, оставаясь неизменным по абсолютной величине. Произведение псевдоскаляра на полярный вектор есть вектор аксиальный. Произведение псевдоскаляра на аксиальный вектор есть вектор полярный.* Если пользоваться одними только правыми или одними только левыми системами координат (а в физике, как уже упоминалось, применяется почти исключительно правая система), то отпадает необходимость разделения векторов на полярные и аксиальные, а скаляров — на истинные скаляры и псевдоскаляры.

Операция сложения двух векторов имеет смысл только тогда, когда складываемые векторы оба полярные или оба аксиальные. Сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ не имеет смысла, если один из векторов полярный, а другой — аксиальный. Сумма такого рода не преобразовывалась бы по правилу преобразования полярного или аксиального вектора, а потому она не могла бы быть ни тем, ни другим.

11. Частным случаем вектора, представляющего площадку или поверхность, является так называемое *векторное произведение* двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Оно определяется как вектор площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Чтобы ориентировать этот параллелограмм, надо обходить его периметр от начала вектора $\boldsymbol{a}$ к его концу, затем от конца вектора $\boldsymbol{a}$ параллельно вектору $\boldsymbol{b}$ и т. д., пока при таком обходе мы не вернемся в исходную точку (рис. 18). Короче говоря, первый вектор $\boldsymbol{a}$ надо проходить в прямом, а второй вектор $\boldsymbol{b}$ — в обратном направлениях. В согласии с изложенным выше векторное произведение можно изобразить стрелкой, направленной перпендикулярно к плоскости параллелограмма и находящийся в нужном винтовом соотношении с направлением обхода периметра параллелограмма. Длина стрелки численно равна площади параллелограмма, т. е. $ab \sin \vartheta$, где ϑ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Векторное произведение мы будем обозначать

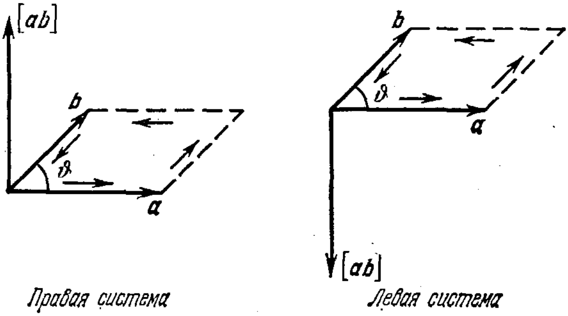

Рис. 18.

символом $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}]$, т. е. будем заключать векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в квадратные скобки. Часто употребляется также косой крест: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. *Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — полярные, то векторное произведение их будет вектором аксиальным. Векторное произведение полярного вектора на аксиальный есть вектор полярный. Векторное произведение двух аксиальных векторов есть также аксиальный вектор.*

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два полярных или два аксиальных вектора, то в прямоугольных системах координат выражение $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ есть инвариант. (Это выражение называется *скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначается символом $(\boldsymbol{ab})$ или $\boldsymbol{ab}$.)

Указание. Воспользоваться инвариантами $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, $b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$ и $(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$.

2. Доказать, что скалярное произведение полярного вектора на аксиальный есть псевдоскаляр (псевдоинвариант).

3. Доказать, что скалярное произведение любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представляется выражением $(\boldsymbol{ab}) = ab \cos \vartheta$, где ϑ — угол между этими векторами.

Доказательство. Направим ось X вдоль вектора $\boldsymbol{a}$. Тогда $a_y = a_z = 0$, $b_x = b \cos \vartheta$. Так как скалярное произведение $(\boldsymbol{ab}) \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ есть инвариант, то $(\boldsymbol{ab}) = a_x b_x = ab \cos \vartheta$.

4. Скалярное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на векторное произведение других двух векторов $[\boldsymbol{bc}]$ называется смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и обозначается $(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}])$. Показать, что оно является псевдоскаляром, если один из этих векторов или все три полярные. Если же полярных векторов два или совсем нет, то смешанное произведение будет скаляром (инвариантом). Показать, что смешанное произведение численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Пользуясь этим, доказать, что

$$(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]) = (\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]) = (\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]) = -(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{cb}]) = -(\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ac}]) = -(\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ba}]), \qquad (7.3)$$

т. е. *смешанное произведение не меняется при любой циклической перестановке перемножаемых векторов,* а при нарушении цикличности меняет знак.

5. Доказать формулу

$$[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]] = (\boldsymbol{ac})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{ab})\,\boldsymbol{c}. \tag{7.4}$$

Доказательство. Представим вектор $\boldsymbol{a}$ в виде $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\parallel} + \boldsymbol{a}_{\perp}$, где $\boldsymbol{a}_{\parallel}$ — составляющая вектора $\boldsymbol{a}$ вдоль вектора $\boldsymbol{d} \equiv [\boldsymbol{bc}]$, а $\boldsymbol{a}_{\perp}$ — составляющая, перпендикулярная к $\boldsymbol{d}$. Тогда

$$[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]] \equiv [\boldsymbol{ad}] = [\boldsymbol{a}_{\perp}\boldsymbol{d}].$$

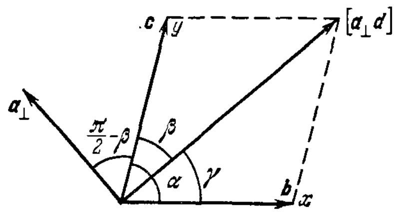

Рис. 19.

Три вектора $\boldsymbol{a}_{\perp}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ лежат в одной плоскости. Примем ее за плоскость рисунка (рис. 19). Вектор $\boldsymbol{d}$ перпендикулярен к этой плоскости, его длина равна $bc \sin\alpha$, если α — угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Поэтому длина вектора $[\boldsymbol{a}_{\perp}\boldsymbol{d}]$ будет $a_{\perp} bc \sin\alpha$. Поскольку этот вектор лежит в плоскости рисунка, его можно разложить по векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, т. е. представить в виде

$$[\boldsymbol{a}_{\perp}\boldsymbol{d}] = x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c}.$$

Неизвестные числа x и y найдутся с помощью теоремы синусов:

$$\frac{xb}{a_{\perp} bc \sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad \frac{yc}{a_{\perp} bc \sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Отсюда

$$x = a_{\perp} c \sin\beta = a_{\perp} c \cos(\boldsymbol{a}_{\perp},\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}_{\perp}\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{ac}),$$
$$y = a_{\perp} b \sin\gamma = -a_{\perp} b \cos(\boldsymbol{a}_{\perp},\ \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a}_{\perp}\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{ab}).$$

6. Доказать формулу

$$([\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{cd}]) = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc}).$$

7. Показать, что векторное произведение $[\boldsymbol{ab}]$ можно записать в виде символического определителя

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{7.5}$$

если условиться разлагать его по элементам первой строки, состоящей из единичных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ вдоль координатных осей прямоугольной системы координат. Запись справедлива и в правых и в левых системах координат. Компоненты векторного произведения определяются одними и теми же формулами, независимо от того, какие (прямоугольные) системы координат используются. С этим и связано то обстоятельство, что векторное произведение — аксиальный вектор.

8. Доказать, что в прямоугольной системе координат

$$(\boldsymbol{A}\,[\boldsymbol{BC}]) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{7.6}$$

9. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — произвольные векторы, не лежащие в одной плоскости. Векторы

$$\boldsymbol{e}_1^* = \frac{[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3]}{(\boldsymbol{e}_1\,[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3])}, \qquad \boldsymbol{e}_2^* = \frac{[\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1]}{(\boldsymbol{e}_1\,[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3])}, \qquad \boldsymbol{e}_3^* = \frac{[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2]}{(\boldsymbol{e}_1\,[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3])} \tag{7.7}$$

называются по отношению к ним *взаимными*. Очевидно, что они также не лежат в одной плоскости. Показать, что

$$e_1 = \frac{[e_2^* e_3^*]}{(e_1^* [e_2^* e_3^*])}, \quad e_2 = \frac{[e_3^* e_1^*]}{(e_1^* [e_2^* e_3^*])}, \quad e_3 = \frac{[e_1^* e_2^*]}{(e_1^* [e_2^* e_3^*])}. \tag{7.8}$$

Показать, далее, что

$$(e_i e_k^*) = \delta_{ik}, \tag{7.9}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — произвольные векторы. Представим их в виде

$$\boldsymbol{A} = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3, \qquad \boldsymbol{B} = B_1^* e_1^* + B_2^* e_2^* + B_3^* e_3^*.$$

Показать, что

$$(\boldsymbol{AB}) = A_1 B_1^* + A_2 B_2^* + A_3 B_3^*. \tag{7.10}$$

§ 8. Степени свободы и обобщенные координаты

1. Положение точки в пространстве можно задать тремя прямоугольными координатами x, y, z. Но это можно сделать и иначе. Например, вместо прямоугольных можно взять *полярные* или какие-либо другие координаты. Существенно, однако, что при любом выборе число независимых координат, требующихся для однозначного определения положения точки, которая может перемещаться в пространстве как угодно, равно *трем*. Про такую точку говорят, что она обладает *тремя степенями свободы*.

Может случиться, что перемещение точки в заданных условиях не может быть каким угодно. Рассмотрим, например, маленький шарик, привязанный к концу нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен (математический маятник). Если нить натянута, то шарик может перемещаться только по поверхности сферы с центром в точке закрепления. Можно привести много других примеров, в которых материальная точка все время вынуждена находиться на какой-либо заданной поверхности. В подобных случаях говорят, что на ее движение *наложены связи*. Координаты x, y, z такой точки должны удовлетворять соотношению вида $f(x, y, z) = 0$, которое является уравнением рассматриваемой поверхности. Ввиду этого независимыми остаются только две координаты, например x и y. Третья координата z может быть вычислена из уравнения связей $f(x, y, z) = 0$. В этих случаях говорят, что точка обладает *двумя степенями свободы*.

Если точка может перемещаться только вдоль какой-либо заданной кривой, то число независимых координат, требующихся для определения ее положения, снижается до одного. За координату можно принять, например, расстояние материальной точки от какой-либо точки рассматриваемой кривой, отсчитанное вдоль этой кривой. В таких случаях говорят, что точка обладает *одной степенью свободы*.