называются по отношению к ним *взаимными*. Очевидно, что они также не лежат в одной плоскости. Показать, что

$$e_1=\frac{[e_2^*e_3^*]}{(e_1^*[e_2^*e_3^*])},\qquad e_2=\frac{[e_3^*e_1^*]}{(e_1^*[e_2^*e_3^*])},\qquad e_3=\frac{[e_1^*e_2^*]}{(e_1^*[e_2^*e_3^*])}. \tag{7.8}$$

Показать, далее, что

$$(e_ie_k^*)=\delta_{ik}, \tag{7.9}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{ik}=1$ при $i=k$ и $\delta_{ik}=0$ при $i\neq k$.

Пусть A и B — произвольные векторы. Представим их в виде

$$A=A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3,\qquad B=B_1^*e_1^*+B_2^*e_2^*+B_3^*e_3^*.$$

Показать, что

$$(AB)=A_1B_1^*+A_2B_2^*+A_3B_3^*. \tag{7.10}$$

§ 8. Степени свободы и обобщенные координаты

1. Положение точки в пространстве можно задать тремя прямоугольными координатами x, y, z. Но это можно сделать и иначе. Например, вместо прямоугольных можно взять *полярные* или какие-либо другие координаты. Существенно, однако, что при любом выборе число независимых координат, требующихся для однозначного определения положения точки, которая может перемещаться в пространстве как угодно, равно *трем*. Про такую точку говорят, что она обладает *тремя степенями свободы*.

Может случиться, что перемещение точки в заданных условиях не может быть каким угодно. Рассмотрим, например, маленький шарик, привязанный к концу нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен (математический маятник). Если нить натянута, то шарик может перемещаться только по поверхности сферы с центром в точке закрепления. Можно привести много других примеров, в которых материальная точка все время вынуждена находиться на какой-либо заданной поверхности. В подобных случаях говорят, что на ее движение *наложены связи*. Координаты x, y, z такой точки должны удовлетворять соотношению вида $f(x, y, z)=0$, которое является уравнением рассматриваемой поверхности. Ввиду этого независимыми остаются только две координаты, например x и y. Третья координата z может быть вычислена из уравнения связей $f(x, y, z)=0$. В этих случаях говорят, что точка обладает *двумя степенями свободы*.

Если точка может перемещаться только вдоль какой-либо заданной кривой, то число независимых координат, требующихся для определения ее положения, снижается до одного. За координату можно принять, например, расстояние материальной точки от какой-либо точки рассматриваемой кривой, отсчитанное вдоль этой кривой. В таких случаях говорят, что точка обладает *одной степенью свободы*.

2. Все сказанное без труда обобщается на случай механической системы, состоящей из произвольного числа n материальных точек. Если эти точки могут перемещаться без всяких ограничений, то для определения мгновенного положения их надо задать $3n$ координат (по три координаты для каждой точки). В этом случае говорят, что система обладает $3n$ *степенями свободы*. В некоторых задачах, однако, свобода перемещения материальных точек ограничена. На $3n$ координат налагаются дополнительные условия, называемые *связями*. Для однозначного определения положения всех материальных точек системы достаточно знать меньшее число координат. Обозначим его f. Остальные $3n - f$ координат могут быть вычислены из уравнений связи. Не обязательно в качестве независимых координат брать прямоугольные координаты. Для этой цели могут быть использованы любые f величин $q_1, q_2, \ldots, q_f$, заданием которых положение материальных точек системы определяется однозначно. Такие величины называются *обобщенными координатами*. Движение системы определится полностью, если обобщенные координаты будут найдены как функции времени. Производные обобщенных координат по времени $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ называются *обобщенными скоростями*. Так, при вращении материальной точки по окружности ее положение можно задать значением центрального угла φ, который радиус-вектор вращающейся точки образует с положением его в некоторый определенный момент времени (например, в момент $t = 0$). Обобщенная скорость в этом случае $\omega = \dot{\varphi}$ имеет смысл угловой скорости вращающейся точки.

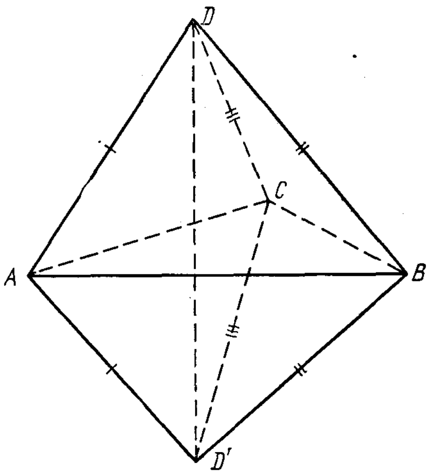

Рис. 20.

Обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_f$ могут быть выбраны как угодно, лишь бы они в любой момент времени полностью определяли положение механической системы. Однако число независимых обобщенных координат f во всех случаях будет одно и то же. Оно называется *числом степеней свободы системы*.

3. Определим, например, число степеней свободы *идеально твердого тела. Идеально твердым телом* в механике называют идеализированную систему материальных точек, все расстояния между которыми при движении системы не изменяются с течением времени. Докажем, что *идеально твердое тело, если на его движение не наложены никакие ограничения, обладает шестью степенями* *свободы.* Действительно, чтобы однозначно определить положение твердого тела, достаточно задать положение каких-либо трех его точек A, B, C, не лежащих на одной прямой (рис. 20). Для доказательства возьмем произвольную четвертую точку тела D. Расстояния AD, BD и CD для рассматриваемого твердого тела могут считаться известными, так как при любых движениях эти расстояния не изменяются. Кроме того, следует учесть, что при любых движениях твердого тела точка D все время должна находиться по одну и ту же сторону плоскости треугольника ABC, никогда не пересекая ее. Чтобы определить положение в пространстве точки D, построим по заданным длинам AC, AD, CD треугольник ADC. Его основание AC в пространстве фиксировано. Чтобы найти положение вершины D, будем вращать треугольник ADC вокруг основания AC, пока вершина D не окажется на заданном расстоянии от третьей точки B. Этому условию удовлетворяют две точки D и D'. Но вторая из них не удовлетворяет условиям задачи, так как она находится не с той стороны от плоскости треугольника ABC. Таким образом, зная положение трех точек A, B, C, можно геометрическим построением найти положение любой другой точки твердого тела.

Положения трех точек A, B, C можно задать их прямоугольными координатами x_A, y_A, z_A; x_B, y_B, z_B; x_C, y_C, z_C. Эти девять координат, однако, не независимы, а связаны тремя соотношениями

$$
\begin{aligned}
(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2&=AB^2=\text{const},\\
(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2+(z_B-z_C)^2&=BC^2=\text{const},\\
(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2&=CA^2=\text{const},
\end{aligned}
$$

поскольку длины AB, BC и CA не изменяются. Независимых координат остается только шесть — твердое тело имеет шесть степеней свободы.

При ограничении свободы движения число степеней свободы твердого тела уменьшается. Так, *твердое тело, одна из точек которого неподвижно закреплена, может только вращаться вокруг этой неподвижной точки и имеет три степени свободы. Твердое тело, которое может только вращаться вокруг закрепленной оси, имеет одну степень свободы. Если же твердое тело может скользить вдоль закрепленной оси и одновременно вращаться вокруг нее, то число степеней свободы становится равным двум* и т. д.