Для медленных движений, когда $v^2/c^2 \ll 1$, зависимостью массы от скорости можно пренебречь, полагая $m = m_0$. Тогда релятивистская механика переходит в нерелятивистскую как в свой предельный приближенный случай. Чтобы составить представление о величине ошибки, которая делается при таком пренебрежении, рассмотрим космический корабль, движущийся со скоростью $v = 8$ км/с. В этом случае $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{8}{300\,000}\right)^2 \approx 7 \cdot 10^{-10}$. Если масса космического корабля $m = 5$ т $= 5 \cdot 10^6$ г, то релятивистская масса m будет превышать массу покоя всего на $m - m_0 = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ г. При всех расчетах движений космического корабля такой поправкой не только можно, но и нужно пренебречь, хотя бы потому, что входные данные, необходимые для расчетов, не могут быть измерены с такой высокой точностью.

§ 11. Второй закон Ньютона. Сила

1. Описание движения в конце концов сводится к нахождению координат материальных точек механической системы как функций времени. Однако таким путем трудно подметить общие закономерности движения. Для этой цели надо обратиться к дифференциальным уравнениям, в которые наряду с координатами и скоростями входят производные импульсов по времени (или, в нерелятивистской механике, ускорения).

Если материальная точка не изолирована, то из-за взаимодействия с окружающими телами ее импульс не сохраняется. Поэтому естественно за меру интенсивности взаимодействия принять производную импульса по времени $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \dot{\boldsymbol{p}}$. *Одним из фундаментальных обобщений классической механики является установление того факта, что производная* $\dot{\boldsymbol{p}}$ *определяется положением рассматриваемой материальной точки относительно окружающих ее тел, а иногда также и ее скоростью.* Она является функцией радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ и скорости $\boldsymbol{v}$ материальной точки и может зависеть также от координат и скоростей окружающих материальных точек как от параметров. Обозначим эту функцию $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$. Тогда

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}. \tag{11.1}$$

Функция координат и скорости материальной точки $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$, определяющая производную ее импульса по времени, называется *силой* *).

*) Используя принцип относительности и однородность пространства, можно показать, что сила $\boldsymbol{F}$ зависит не от самих координат и скоростей, а только от *разностей координат* и *разностей скоростей* рассматриваемой материальной точки и точек, с которыми она взаимодействует (см. задачу 3 к § 38). Однако для ближайших целей это уточнение нам не понадобится.

Сила есть *вектор,* так как она получается дифференцированием вектора $\boldsymbol{p}$ по скалярному аргументу t.

Итак, *производная импульса материальной точки по времени равна действующей на нее силе.*

Это положение называется *вторым законом Ньютона.* Уравнение (11.1), выражающее этот закон, называется *уравнением движения материальной точки.* Для движений с нерелятивистскими скоростями зависимостью массы от скорости можно пренебречь и записать второй закон Ньютона в виде

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}, \tag{11.2}$$

или

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}. \tag{11.3}$$

Масса, умноженная на ускорение, равна действующей силе.

Фактическое содержание второго закона Ньютона, подчеркнем это еще раз, состоит в том, что сила $\boldsymbol{F}$ зависит только от координат и скорости материальной точки. А второй закон Ньютона и уравнение движения (11.1) получают конкретное содержание только после того, как определена функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$. К установлению вида таких функций в каждом конкретном случае и сводится основная задача физической механики.

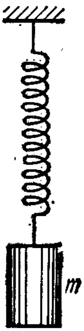

Рис. 21.

2. Приведем простейшие примеры на нахождение уравнений движения. Они являются в то же время примерами, подтверждающими второй закон Ньютона.

Подвесим тело на спиральной пружине (рис. 21). Когда система успокоится, немного оттянем тело вниз из положения равновесия, а затем отпустим. Возникнут колебания вверх и вниз. При подходящих параметрах системы они будут затухать слабо. Тело успеет совершить несколько десятков колебаний, прежде чем колебания заметно затухнут. Мгновенное положение тела можно характеризовать одной координатой x — смещением тела из положения равновесия. Для определения функции $x = x(t)$ можно через малые промежутки времени фотографировать тело на кинопленку, а затем обработать фотографию и построить график $x = x(t)$. Можно поступить и как-нибудь иначе. Для слабо затухающих колебаний график почти не отличается от синусоиды (рис. 22) и представляется уравнением

$$x = A\cos\frac{2\pi t}{T}, \tag{11.4}$$

где A и T — постоянные, называемые *амплитудой* и *периодом колебаний.* Дважды дифференцируя это выражение, находим скорость и ускорение:

$$\dot{x} = -\frac{2\pi A}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}, \qquad \ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Сравнивая последнее выражение с (11.4), получаем

$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x,$$

или после умножения на массу тела

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{11.5}$$

где введено обозначение

$$k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m. \tag{11.6}$$

Сравнивая (11.5) с (11.3), находим силу

$$F = -kx. \tag{11.7}$$

Мы видим, что величина F зависит только от удлинения пружины x — единственного переменного параметра, определяющего

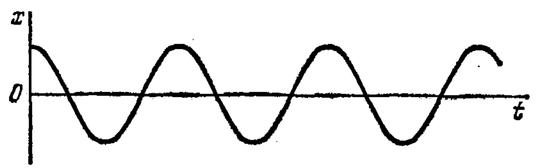

Рис. 22.

положение внешних тел, оказывающих действие на рассматриваемое тело. Если к пружине подвесить тело другой массы, то изменится и период колебаний T. Однако опыт показывает, что отношение $\frac{m}{T^2}$, а с ним и коэффициент k остаются без изменения. Значит, сила F определяется только растяжением пружины и совершенно не зависит от того, каким телом это растяжение вызвано. Эти опытные факты могут служить подтверждением второго закона Ньютона. Следовательно можно ожидать, что если кроме пружины на тело больше ничто не действует, то его ускорение всегда будет равно $k\frac{x}{m}$ и направлено вдоль оси пружины в сторону, противоположную ее удлинению x. Оно совершенно не зависит от того, ка́к движется тело: прямолинейно, по кругу или как-нибудь иначе. Это предположение также подтверждается опытами.

Одновременно мы видим, что *сила натяжения пружины F пропорциональна ее удлинению x*. Как показали более точные исследования, этот результат является приближенным. Им можно пользоваться, когда удлинение пружины не очень велико. Он называется *законом Гука* (1635—1703). Величина k называется *коэффициентом упругости* или *жесткости пружины*. Для конкретной пружины коэффициент k постоянен, но может меняться от пружины к пружине.

Опыт показывает, что колебания тела, подвешенного на пружине, постепенно затухают и в конце концов прекращаются. Отсюда следует, что уравнение движения (11.5) является приближенным. Оказывается, что тело, движущееся в газообразной или жидкой среде, встречает сопротивление, зависящее от скорости тела. Если скорость тела (относительно окружающей среды) не очень велика, то эта сила приблизительно пропорциональна первой степени скорости. Так, в случае шара на пружине затухание его колебаний в газе довольно точно описывается уравнением

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \tag{11.8}$$

где b — постоянный коэффициент, зависящий от размеров шара и рода газа, в котором он колеблется. Здесь мы имеем пример силы, которая зависит не только от положения, но и от скорости шара.

3. Для решения задач на движение материальных точек и их систем нужны *дифференциальные уравнения движения*. Способ получения таких уравнений не имеет значения. В частности, их можно было бы получать и строить всю механику без введения понятия силы.

При рассмотрении различных динамических задач механика ставит и решает два вопроса: 1) по заданному движению тел вычислить силы, действующие на них; 2) по заданным силам определить движение тел. Задачи первого типа сравнительно просты. Они сводятся к вычислению ускорений материальных точек, из которых состоит система. Примером таких задач может служить разобранная нами задача о силе, действующей на колеблющееся тело, подвешенное на пружине. Задачи второго типа много сложнее и являются основными в механике. Здесь прежде всего надо написать уравнение движения для каждой материальной точки, входящей в систему. Это сводится к отысканию сил как функций координат и скоростей взаимодействующих точек. В результате получится система дифференциальных уравнений, решение которой (при определенных начальных условиях) даст полное представление о всех деталях движения. Таким образом, при решении таких задач требуется *интегрирование дифференциальных уравнений*, а это значительно сложнее дифференцирования.

Могут быть и задачи смешанного типа. Сюда относятся, например, такие задачи, когда на движение системы наложены определенные ограничения, например, движущаяся точка должна находиться на какой-то линии или поверхности. Такого рода ограничения называются *связями*. Действие таких линий или поверхностей, как и всяких связей, ограничивающих свободу движения, сводится к тому, что они воздействуют на движущиеся тела с определенными силами, называемыми *реакциями связей*. Во всех подобных случаях задача сводится не только к определению движения каждой материальной точки системы, но и к нахождению реакций связей.

4. Остановимся на вопросе о соотношении между первым и вторым законами Ньютона. Если в уравнении (11.1) положить $\boldsymbol{F} = 0$, то получится $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{p} = \text{const}$, т. е. импульс, а с ним и скорость свободно движущейся материальной точки постоянны. Таким образом, формально первый закон Ньютона является следствием второго. Почему же тогда он выделяется в самостоятельный закон? Дело в том, что уравнение (11.1), выражающее второй закон Ньютона, только тогда имеет смысл, когда указана система отсчета, в которой оно справедливо. Выделить же такую систему (или такие системы) отсчета позволяет первый закон. Он утверждает, что существует система отсчета, в которой свободная материальная точка движется без ускорения. В такой системе отсчета (и в этом состоит второй закон) движение всякой материальной точки подчиняется уравнению (11.1). Таким образом, по существу, первый закон нельзя рассматривать как простое логическое следствие второго. Связь между этими законами более глубокая.

5. Уравнение (11.2) предопределяет выбор единицы силы. Поскольку единицы длины, массы и времени уже установлены, это уравнение вынуждает нас за единицу силы принять такую силу, которая единице массы сообщает ускорение, равное единице. В 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла так называемую *Международную систему единиц* (сокращенно СИ). В основу этой системы положены шесть *независимых* единиц *): единица длины *метр* (м), единица времени *секунда* (с), единица массы *килограмм* (кг), единица разности температуры *кельвин* (К), единица силы тока *ампер* (А) и единица силы света *кандела* (кд). Остальные единицы являются их *производными*. Смысл термина «производная единица» легко уясняется на примере единицы силы. В системе СИ за единицу силы принимается ньютон (Н). Ньютон есть такая сила, которая массе в один килограмм сообщает ускорение в 1 м/с^2. Наряду с системой СИ в физике сохранена также применявшаяся длительное время система СГС. Основными единицами в этой системе являются: *сантиметр* (см) — единица длины, *секунда* (с) — единица времени, *грамм* (г) — единица массы. Единицей силы в системе СГС является *дина* (дин). Дина есть сила, сообщающая массе в 1 г ускорение в 1 см/с^2. Очевидно,

$$1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}.$$

В механике обе системы одинаково удобны. Ни одна из них не обладает преимуществом по сравнению с другой, так как между

*) Здесь для сокращения наименований физических единиц (дается в скобках) мы используем обозначения нового ГОСТа, согласно которому сокращенные наименования единиц набираются прямым шрифтом, а в случае, если название единиц произошло от имени ученых, — с прописной буквы.

ними нет разницы по существу. Обе системы в механике отличаются друг от друга только *масштабами* основных единиц — единицы длины и единицы массы. Все понятия механики имеют один и тот же смысл, а формулы пишутся совершенно одинаково в обеих системах единиц. Не так обстоит дело в учении об электрических, оптических и атомных явлениях. Для изучения таких явлений система СГС значительно лучше приспособлена, чем система СИ. Поэтому в нашем курсе отдается предпочтение системе СГС.

6. В заключение этого параграфа остановимся на вопросе о *сложении сил*. Как уже было сказано выше, *сила является вектором*. Этим мы хотим сказать только то, что при повороте координатных осей составляющие силы преобразуются как составляющие вектора. Как и для всякого вектора, для сил можно ввести операцию сложения в математическом смысле (см. § 7). По определению каждым двум силам $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ приводится в соответствие новый объект, изображающийся диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Этот объект, как легко доказать, является вектором. Он называется *равнодействующей* или *результирующей* сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ или их *геометрической суммой*. Проверять на опыте результат такого сложения имеет столько же смысла, что и проверять на опыте правильность арифметического равенства $2+3=5$. Результат верен *по самому определению* сложения векторов. Однако сложение сил понимают иногда и в другом *(физическом)* смысле. И именно о нем идет речь, когда в элементарной физике впервые говорят о сложении сил. При этом самый вопрос формулируется недостаточно ясно. Говорят, что на тело (материальную точку) одновременно действуют две силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. После этого спрашивают, какой одной силой $\boldsymbol{F}$ их можно заменить, чтобы получить тот же результат? Неясность заключается в том, что не указывается, в каком смысле следует понимать выражение: «На тело одновременно действуют две силы». На всякую материальную точку в данных конкретных условиях действует всегда только одна сила, величина и направление которой определяется расположением этой точки относительно всех окружающих тел. Какой же смысл вкладывается в содержание поставленного вопроса? Разъясним это на двух примерах.

Допустим, что к некоторой материальной точке A прикреплена растянутая пружина, которая тянет ее с некоторой силой $\boldsymbol{F}_1$. Уберем эту пружину и будем тянуть ту же материальную точку A другой растянутой пружиной с силой $\boldsymbol{F}_2$. О направлении и величине сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ мы судим по направлениям осей пружин и степени их растяжения. Прикрепим теперь к материальной точке A обе пружины вместе, направив и растянув их по-прежнему. Вопрос заключается в том, чтобы определить силу $\boldsymbol{F}$, действующую на материальную точку A, когда ее тянут обе пружины вместе.

В качестве второго примера рассмотрим неподвижный точечный заряд q, помещенный в некоторой точке пространства A. Пусть в точках B и C находятся другие точечные заряды, q_1 и q_2. Пусть они вместе действуют на заряд q с силой $\boldsymbol{F}$. Уберем второй из них и обозначим через $\boldsymbol{F}_1$ силу, с которой на q будет действовать заряд q_1. Аналогично определится сила $\boldsymbol{F}_2$, с которой заряд q_2 действует на q в отсутствие заряда q_1. Вопрос опять заключается в том, как по силам $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ найти силу $\boldsymbol{F}$.

Вообще, пусть $\boldsymbol{F}_i$ означает силу, действующую на рассматриваемую материальную точку со стороны какого-то другого i-го тела (источника силы $\boldsymbol{F}_i$), когда все остальные источники сил удалены ($i = 1, 2, \ldots, n$). Чему будет равна действующая сила $\boldsymbol{F}$, когда все n источников действуют одновременно? Это *физический вопрос,* на который нельзя дать ответ путем определения. Обычно говорят, что сила $\boldsymbol{F}$ равна геометрической сумме сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$. Однако такой ответ не является логическим следствием законов Ньютона или каких-либо других законов. Он может быть верным, но может быть и неверным. Это может решить только опыт. Опыт показывает, например, что для растянутых пружин или электрических сил, возбуждаемых точечными зарядами, ответ верен. Если это имеет место, то говорят, что силы $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots$ подчиняются *принципу суперпозиции*. В основе принципа суперпозиции лежит представление о *независимости действия сил*. Говорят, что силы действуют *независимо,* если каждая сила $\boldsymbol{F}_i$ сообщает рассматриваемому телу одно и то же ускорение $\boldsymbol{a}_i$, независимо от того, действует ли только один i-й источник сил или все n источников одновременно. Так как ускорение является вектором, то результирующее ускорение найдется векторным сложением всех $\boldsymbol{a}_i$. Поэтому и результирующая сила $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ также найдется векторным сложением независимо действующих сил $\boldsymbol{F}_i = m\boldsymbol{a}_i$. Следовательно, применимость правила параллелограмма для сложения сил в рассматриваемом физическом смысле эквивалентна предположению о независимости действия сил. Но когда тела, являющиеся источниками сил, влияют друг на друга и вследствие этого меняют свое состояние, то результат вычисления силы $\boldsymbol{F}$ по указанной схеме может оказаться неверным. Это получится, например, когда во втором примере вместо точечных зарядов q_1 и q_2 взять протяженные тела, заряженные электричеством. При сближении таких тел распределение электричества на них изменится из-за индукции, а это отразится на величине действующей силы. Но и в этом случае можно воспользоваться принципом суперпозиции, если заряды на телах в их окончательных положениях мысленно разделить на достаточно малые части. Считая такие части точечными зарядами, можно вычислить создаваемые ими электрические поля по *закону Кулона,* а затем воспользоваться принципом суперпозиции. Такое утверждение следует рассматривать как обобщение опытных фактов.

ЗАДАЧИ

1. Лифт движется с ускорением $a = \alpha g$, причем $|\alpha| < 1$. Зная вес покоящегося лифта P (вместе с нагрузкой), определить во время ускоренного движения натяжение троса T, на котором он подвешен.

Ответ. $T = P(1 - \alpha)$. Дробь α следует считать положительной, когда ускорение a направлено вниз, и отрицательной, когда оно направлено вверх.

2. К пружине прикреплено тело, которое может смещаться вдоль определенной прямой (например, вдоль стержня, на который оно надето). Эта система может служить *акселерометром*, т. е. прибором для измерения ускорения тела, на котором такой прибор установлен (автомобиля, самолета, поезда и пр.). Опишите принцип действия такого акселерометра.

3. Самолет совершает вираж, двигаясь по окружности с постоянной скоростью v на одной и той же высоте. Определить радиус r этой окружности, если плоскость крыла самолета наклонена к горизонтальной плоскости под постоянным углом α.

Ответ. $r = \dfrac{v^2}{g \operatorname{tg} \alpha}$.

Указание. Когда самолет летел прямолинейно, плоскость крыла была горизонтальна. Подъемная сила в этом случае направлена вертикально вверх, т. е. перпендикулярна к плоскости крыла. При повороте корпуса самолета вокруг продольной оси подъемная сила поворачивается на тот же угол, т. е. продолжает оставаться перпендикулярной к плоскости крыла, так как силы взаимодействия самолета с окружающей средой зависят лишь от относительного движения самолета и среды.

§ 12. Третий закон Ньютона и закон сохранения импульса

1. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих материальных точек. В этом случае справедлив закон сохранения импульса

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \text{const}.$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\dot{\boldsymbol{p}}_1 + \dot{\boldsymbol{p}}_2 = 0,$$

или, на основании второго закона Ньютона (11.1),

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2, \tag{12.1}$$

где $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ — силы, с которыми рассматриваемые материальные точки действуют друг на друга. Привлечем сюда опытный факт, согласно которому силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ направлены *вдоль прямой*, соединяющей взаимодействующие точки. Тогда мы придем к *третьему закону Ньютона:*

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

Одну из сил, $\boldsymbol{F}_1$ или $\boldsymbol{F}_2$, согласно Ньютону иногда называют *действием*, а другую — *противодействием*, и формулируют тре-