ЗАДАЧИ

1. Лифт движется с ускорением $a = \alpha g$, причем $|\alpha| < 1$. Зная вес покоящегося лифта P (вместе с нагрузкой), определить во время ускоренного движения натяжение троса T, на котором он подвешен.

Ответ. $T = P(1 - \alpha)$. Дробь α следует считать положительной, когда ускорение a направлено вниз, и отрицательной, когда оно направлено вверх.

2. К пружине прикреплено тело, которое может смещаться вдоль определенной прямой (например, вдоль стержня, на который оно надето). Эта система может служить *акселерометром*, т. е. прибором для измерения ускорения тела, на котором такой прибор установлен (автомобиля, самолета, поезда и пр.). Опишите принцип действия такого акселерометра.

3. Самолет совершает вираж, двигаясь по окружности с постоянной скоростью v на одной и той же высоте. Определить радиус r этой окружности, если плоскость крыла самолета наклонена к горизонтальной плоскости под постоянным углом α.

Ответ. $r = \dfrac{v^2}{g \operatorname{tg} \alpha}$.

Указание. Когда самолет летел прямолинейно, плоскость крыла была горизонтальна. Подъемная сила в этом случае направлена вертикально вверх, т. е. перпендикулярна к плоскости крыла. При повороте корпуса самолета вокруг продольной оси подъемная сила поворачивается на тот же угол, т. е. продолжает оставаться перпендикулярной к плоскости крыла, так как силы взаимодействия самолета с окружающей средой зависят лишь от относительного движения самолета и среды.

§ 12. Третий закон Ньютона и закон сохранения импульса

1. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих материальных точек. В этом случае справедлив закон сохранения импульса

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \text{const}.$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\dot{\boldsymbol{p}}_1 + \dot{\boldsymbol{p}}_2 = 0,$$

или, на основании второго закона Ньютона (11.1),

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2, \tag{12.1}$$

где $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ — силы, с которыми рассматриваемые материальные точки действуют друг на друга. Привлечем сюда опытный факт, согласно которому силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ направлены *вдоль прямой*, соединяющей взаимодействующие точки. Тогда мы придем к *третьему закону Ньютона:*

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

Одну из сил, $\boldsymbol{F}_1$ или $\boldsymbol{F}_2$, согласно Ньютону иногда называют *действием,* а другую — *противодействием,* и формулируют третий закон следующим образом. *Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие*. Следует, однако, заметить, что «действие» по своей физической природе ничем не отличается от «противодействия». Если действующая сила обусловлена деформацией, всемирным тяготением или наличием электрического поля, то и противодействующая сила обусловлена тем же самым. Так, тяжелое тело, лежащее на столе, давит на стол, испытывая со стороны стола противоположно направленное противодавление. Действие — давление камня на стол — обусловлено деформацией камня, противодействие — давление стола на камень — обусловлено деформацией стола. В основе подразделения сил на «действующие» и «противодействующие» лежит представление об *активных телах,* производящих действие, и *пассивных телах,* оказывающих противодействие. Так, если лошадь тянет телегу, то активным телом, производящим действие, будет лошадь, а пассивным телом, оказывающим противодействие, — телега. Однако подразделение тел на активные и пассивные можно провести далеко не всегда. Например, когда Солнце и планета притягиваются друг к другу силами всемирного тяготения, то в этом взаимодействии они выступают совершенно равноправно, и нельзя указать, какое из этих взаимодействующих тел является активным, а какое пассивным. Какую из сил $\boldsymbol{F}_1$ или $\boldsymbol{F}_2$ назвать действием и какую противодействием — это в большинстве случаев вопрос соглашения.

2. Третий закон Ньютона мы сформулировали для замкнутой системы, состоящей из двух взаимодействующих материальных точек. Постулируем теперь его справедливость для системы из произвольного числа материальных точек. Мы исходим из представления, что и в этом случае взаимодействие сводится к силам *попарного взаимодействия* между материальными точками. Пусть $\boldsymbol{F}_{ik}$ — сила, с которой i-я материальная точка действует на k-ю, а $\boldsymbol{F}_{ki}$ — сила, с которой k-я точка действует на i-ю. Третий закон утверждает, что обе эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие точки, причем $\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki}$. В таком понимании третий закон Ньютона позволяет выполнить переход от *механики отдельной материальной точки* к *механике системы материальных точек*. В частности, он позволяет распространить закон сохранения импульса на случай системы произвольного числа n взаимодействующих материальных точек. Рассмотрим этот вопрос, а также другие связанные с ним важные вопросы.

Силы, действующие на материальные точки системы, можно разделить на *внутренние* и *внешние*. Внутренние силы — это силы взаимодействия между материальными точками самой системы. Выше мы обозначили их символами $\boldsymbol{F}_{ik}$ с двумя индексами i и k, которые указывают, какие точки взаимодействуют. Внешние силы — это такие силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела. Согласно третьему закону Ньютона $\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki}$, т. е. $\boldsymbol{F}_{ik} + \boldsymbol{F}_{ki} = 0$. Отсюда следует, что геометрическая сумма всех внутренних сил, действующих в системе, равна нулю. Запишем этот результат в виде соотношения

$$\boldsymbol{F}_1^{(i)} + \boldsymbol{F}_2^{(i)} + \ldots + \boldsymbol{F}_n^{(i)} = 0, \tag{12.2}$$

снабдив каждую силу верхним индексом (i), который указывает, что речь идет о внутренних силах. Нижний индекс обозначает номер материальной точки, на которую действует сила. Таким образом, $\boldsymbol{F}_1^{(i)}$, например, обозначает полную внутреннюю силу, действующую на первую материальную точку. Обозначим далее символами $\boldsymbol{F}_1^{(e)}$, $\boldsymbol{F}_2^{(e)}$, ... внешние силы, действующие на материальные точки системы. Тогда на основании второго закона Ньютона можно написать

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_1^{(i)} + \boldsymbol{F}_1^{(e)},$$
$$\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_2^{(i)} + \boldsymbol{F}_2^{(e)},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Сложив почленно эти уравнения и приняв во внимание соотношение (12.2), найдем

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_n) = \boldsymbol{F}_1^{(e)} + \boldsymbol{F}_2^{(e)} + \ldots + \boldsymbol{F}_n^{(e)},$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)}, \tag{12.3}$$

где $\boldsymbol{p}$ — импульс всей системы, $\boldsymbol{F}^{(e)}$ — равнодействующая всех внешних сил, действующих на нее. Таким образом, *производная по времени от импульса системы материальных точек равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.* Внутренние силы исключаются третьим законом Ньютона. Уравнение (12.3) является обобщением соответствующего уравнения для одной материальной точки.

Допустим теперь, что геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю (это имеет место, например, для замкнутой системы). Тогда $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0$. Производная постоянной величины равна нулю. Справедливо и обратное утверждение: если производная некоторой величины равна нулю, то эта величина постоянна. Поэтому из последнего уравнения следует, что $\boldsymbol{p} = \text{const}$.

Итак, *если геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс системы сохраняется, т. е. не меняется со временем.* В частности, это имеет место, когда система замкнута.

Допустим теперь, что $\boldsymbol{F}^{(e)} \neq 0$, однако равна нулю проекция силы $\boldsymbol{F}^{(e)}$ на какое-либо направление, например, на направление оси X. Тогда из уравнения (12.3) следует, что для этой проекции $\frac{dp_x}{dt} = 0$, а потому $p_x = \text{const}$. Таким образом, полный импульс системы не сохраняется, но сохраняется проекция импульса на направление оси X. Например, импульс свободно падающего тела не может сохраняться, так как на тело действует вниз сила тяжести. Под действием этой силы вертикальная составляющая импульса непрерывно изменяется. Однако горизонтальная составляющая импульса при свободном падении остается неизменной. (Мы учитываем действие только силы тяжести и отвлекаемся от силы сопротивления воздуха и прочих сил.)

3. Относительно приведенного вывода закона сохранения импульса надо сделать следующее замечание. Вывод предполагает, что материальные точки замкнутой системы взаимодействуют между собой попарно, и это взаимодействие подчиняется третьему закону Ньютона. Для справедливости результата достаточно потребовать выполнения более слабого условия (12.2). Достаточно, чтобы обращалась в нуль геометрическая сумма внутренних сил, действующих в системе. Соблюдение этого условия, как будет показано в § 38, является следствием весьма общего свойства пространства — его *однородности*. Возможно, что и это более слабое условие не является необходимым. Возможно, что закон сохранения импульса останется справедливым даже в тех случаях, когда теряет смысл разделение системы на части и нельзя пользоваться представлением о силах взаимодействия между ними, а также другими представлениями и понятиями классической механики. Возможно, что такая ситуация встречается внутри атомных ядер или при превращениях «элементарных» частиц. Опыт показывает, что *закон сохранения импульса,* надлежащим образом обобщенный, *является фундаментальным законом природы, не знающим никаких исключений.* Однако в таком широком понимании он уже не может рассматриваться как следствие законов Ньютона.

4. В нашем изложении закон сохранения импульса для замкнутой системы из двух взаимодействующих материальных точек был постулирован. Его доказательством служил опыт. Это было сделано для того, чтобы ввести понятие массы. Но можно ввести это понятие иначе, а именно определить отношение масс сравниваемых тел по обратному отношению ускорений, сообщаемых им равными силами. Этот способ *не требует предварительного измерения сил.* Достаточно лишь располагать критерием *равенства сил.* Например, если на два тела последовательно подействовать одной и той же пружиной, растянутой на одну и ту же длину, то можно утверждать, что действующие на них силы одинаковы. В сущности, способ определения массы, использованный нами в § 10, является частным случаем этого второго, более общего способа. Он использует то обстоятельство, что два тела, приведенные во взаимодействие, подвергаются согласно третьему закону Ньютона, воздействию сил, равных по величине. Понятно, что если при определении массы не опираться на третий закон Ньютона, а пользоваться каким-либо другим *независимым способом*, то при доказательстве закона сохранения импульса не потребуется особо выделять случай двух взаимодействующих материальных точек. И в этом случае закон сохранения импульса будет теоремой механики. Определение массы, принятое нами в § 10, обладает, однако, тем преимуществом, что оно не нуждается в указании дополнительного критерия, позволяющего судить о равенстве действующих сил. В общем случае такой критерий, не опирающийся на третий закон Ньютона, указать затруднительно.

5. Иногда взаимодействие двух тел A и B осуществляется посредством третьего тела. Тогда мы имеем дело с системой трех тел, и надо принимать во внимание уравнение движения этого третьего

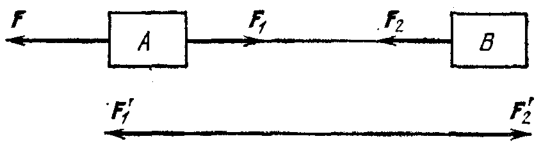

Рис. 23.

тела. Между тем во многих случаях рассуждают так, как если бы этого третьего тела совсем не было. Выясним, когда такой способ рассуждения допустим и не приводит к ошибкам. Для этого рассмотрим следующий пример.

Тела A и B связаны между собой нерастяжимой нитью (рис. 23). На тело A действует сила $\boldsymbol{F}$, натягивающая нить, вследствие чего оба тела A и B движутся с одним и тем же ускорением a. Обычно рассуждают следующим образом. Обозначим F_1 величину силы, с которой тело B действует на тело A посредством натянутой нити, а F_2 — величину противоположно направленной силы, с которой тело A действует на тело B. Тогда

$$m_A a = F - F_1, \qquad m_B a = F_2, \tag{12.4}$$

где m_A и m_B — массы тел A и B. По третьему закону Ньютона $F_1 = F_2$. Исключая F_1 и F_2, находим ускорение

$$a = \frac{F}{m_A + m_B},$$

а затем силы F_1 и F_2:

$$F_2 = F_1 = \frac{m_B}{m_A + m_B} F.$$

Это рассуждение неполно, и может привести к неправильному результату. Из рассуждения выпало третье тело — нить, которая также движется ускоренно. Тела A и B не взаимодействуют непосредственно между собой. Они взаимодействуют с *нитью,* и третий закон Ньютона надо применять именно к таким взаимодействиям. Вот более подробное рассуждение, в котором учитывается ускорение, сообщаемое нити. В нем под F_1 и F_2 следует понимать силы, с которыми на тела A и B действует *натянутая нить*. Силы, с которыми на нить действуют тела A и B, обозначим F_1' и F_2'. К уравнениям (12.4) надо присоединить уравнение движения нити: $ma = F_1' - F_2'$, где m — масса нити. Ввиду равенства действия и противодействия $F_1' = F_1$, $F_2' = F_2$, так что

$$ma = F_1 - F_2.$$

Решая это уравнение совместно с (12.4), получим

$$a = \frac{F}{m_A + m_B + m},$$

$$F_2 = m_B a, \qquad F_1 = (m_B + m)\,a.$$

Теперь $F_1 \neq F_2$, поскольку $m \neq 0$. Допустим, однако, что масса нити пренебрежимо мала по сравнению с массами тел A и B. Тогда отбрасывая член ma, получим приближенно $F_1 = F_2$. В этом приближении результат получается такой же, как если бы тела A и B *непосредственно* взаимодействовали между собой. Идеализируя задачу, говорят, что взаимодействие между телами A и B осуществляется посредством *«безмассового» тела* (нити). Подобные случаи встречаются очень часто. Безмассовые тела просто выбрасывают из рассмотрения. Однако безмассовых тел в действительности не существует, они являются идеализированными абстракциями. Надо отдавать себе отчет, когда можно и когда нельзя пользоваться такими идеализированными абстракциями. В приведенном примере было бы грубой ошибкой пользоваться соотношением $F_1 = F_2$ в тех случаях, когда масса нити сравнима с массами тел A и B.

§ 13. Взаимодействие на расстоянии и полевое взаимодействие

1. Взаимодействие тел может происходить либо при их *непосредственном* соприкосновении, либо *на расстоянии*. В первом случае взаимодействующие тела тянут или толкают друг друга. Возникающие при этом силы обычно вызываются *деформациями тел*. Деформации могут быть малы и не представлять непосредственного интереса в изучаемом явлении. Тогда от них можно отвлечься, учтя их влияние введением соответствующих сил *натяжения* и *давления*. Но если нас интересует происхождение и механизм действия сил, то надо подробно рассмотреть картину деформаций,